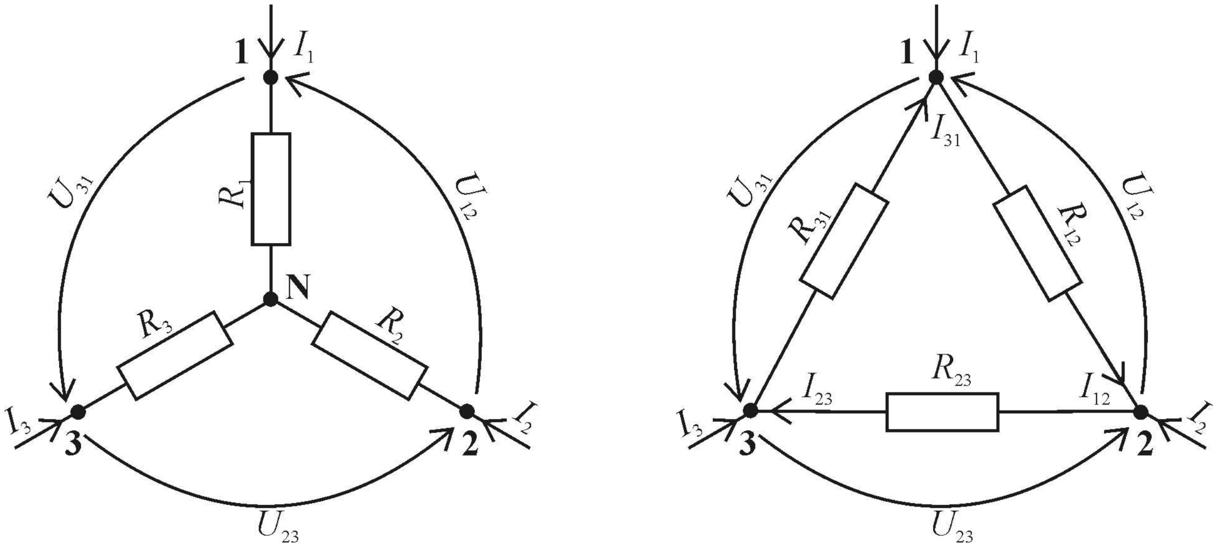
Transfiguracja gwiazda-trójkąt

Jeżeli w obwodzie da się wyodrębnić układ składający się z trzech rezystorów ze wspólnym punktem połączenia **N**, to taki układ z punktu widzenia jego zacisków **1**, **2**, **3** można zastąpić połączeniem trójkątnym. Taką operację nazywamy transfiguracją. Równoważność obu obwodów oznacza jedynie równość prądów I_1, I_2, I_3, jak też napięć U_{12}, U_{23} oraz U_{31}.



Rys.1. Gwiazda rezystancji i równoważny trójkąt.

W poniższym wyprowadzeniu będą używane wymiennie oznaczenia rezystorów jako:

$$G_1 = \frac{1}{R_1}, \quad G_2 = \frac{1}{R_2} \ \text{ oraz } \ G_3 = \frac{1}{R_3}.$$

Prądy w poszczególnych gałęziach można zapisać używając potencjałów węzłów **1**, **2**, **3** i **N**:

$$I_1 = G_1 \left(V_1 - V_{\mathbf{N}}\right),$$

$$I_2 = G_2 \left(V_2 - V_{\mathbf{N}}\right),$$

$$I_3 = G_3 \left(V_3 - V_{\mathbf{N}}\right).$$

Ponieważ suma tych prądów jest równa zeru,

$$I_1 + I_2 + I_3 = G_1 \left(V_1 - V_{\mathbf{N}}\right) + G_2 \left(V_2 - V_{\mathbf{N}}\right) + G_3 \left(V_3 - V_{\mathbf{N}}\right) = 0,$$

można wyznaczyć potencjał węzła **N** :

$$V_{\mathbf{N}} = \frac{G_1 \cdot V_1 + G_2 \cdot V_2 + G_3 \cdot V_3}{G_1 + G_2 + G_3}.$$

Znajomość potencjału punktu wspólnego **N** pozwala wyznaczyć prądy gałęzi

$$I_1 = G_1\left(V_1 - \frac{G_1\cdot V_1 + G_2\cdot V_2 + G_3\cdot V_3}{G_1+G_2+G_3}\right) = G_1\cdot V_1 - G_1\cdot\frac{G_1\cdot V_1 + G_2\cdot V_2 + G_3\cdot V_3}{G_1+G_2+G_3},$$

$$I_2 = G_2\left(V_2 - \frac{G_1\cdot V_1 + G_2\cdot V_2 + G_3\cdot V_3}{G_1+G_2+G_3}\right) = G_2\cdot V_2 - G_2\cdot\frac{G_1\cdot V_1 + G_2\cdot V_2 + G_3\cdot V_3}{G_1+G_2+G_3},$$

$$I_3 = G_3\left(V_3 - \frac{G_1\cdot V_1 + G_2\cdot V_2 + G_3\cdot V_3}{G_1+G_2+G_3}\right) = G_3\cdot V_3 - G_3\cdot\frac{G_1\cdot V_1 + G_2\cdot V_2 + G_3\cdot V_3}{G_1+G_2+G_3}.$$

Sprowadzając do wspólnego mianownika otrzymujemy

$$I_1 = \frac{G_1^2\cdot V_1 + G_1\cdot G_2\cdot V_1 + G_1\cdot G_3\cdot V_1 - G_1^2\cdot V_1 - G_1\cdot G_2\cdot V_2 - G_1\cdot G_3\cdot V_3}{G_1+G_2+G_3} = \frac{G_1\cdot G_2\cdot(V_1-V_2) - G_1\cdot G_3\cdot(V_3-V_1)}{G_1+G_2+G_3},$$

$$I_2 = \frac{G_1\cdot G_2\cdot V_2 + G_2^2\cdot V_2 + G_2\cdot G_3\cdot V_2 - G_1\cdot G_2\cdot V_1 - G_2^2\cdot V_2 - G_3\cdot G_2\cdot V_3}{G_1+G_2+G_3} = \frac{G_2\cdot G_3\cdot(V_2-V_3) - G_2\cdot G_1\cdot(V_1-V_2)}{G_1+G_2+G_3},$$

$$I_3 = \frac{G_1\cdot G_3\cdot V_3 + G_2\cdot G_3\cdot V_3 + G_3^2\cdot V_3 - G_1\cdot G_3\cdot V_1 - G_2\cdot G_3\cdot V_2 - G_3^2\cdot V_3}{G_1+G_2+G_3} = \frac{G_3\cdot G_1\cdot(V_3-V_1) - G_3\cdot G_2\cdot(V_2-V_3)}{G_1+G_2+G_3}.$$

Różnice potencjałów na końcach gałęzi są równe odpowiednim napięciom gałęziowym:

$$I_1 = \frac{G_1\cdot G_2\cdot U_{12} - G_1\cdot G_3\cdot U_{31}}{G_1+G_2+G_3} = \frac{G_1\cdot G_2}{G_1+G_2+G_3}\cdot U_{12} - \frac{G_1\cdot G_3}{G_1+G_2+G_3}\cdot U_{31} = I_{12} - I_{31},$$

$$I_2 = \frac{G_2\cdot G_3\cdot U_{23} - G_2\cdot G_1\cdot U_{12}}{G_1+G_2+G_3} = \frac{G_2\cdot G_3}{G_1+G_2+G_3}\cdot U_{23} - \frac{G_2\cdot G_1}{G_1+G_2+G_3}\cdot U_{12} = I_{23} - I_{12},$$

$$I_3 = \frac{G_3\cdot G_1\cdot U_{31} - G_3\cdot G_2\cdot U_{23}}{G_1+G_2+G_3} = \frac{G_3\cdot G_1}{G_1+G_2+G_3}\cdot U_{31} - \frac{G_3\cdot G_2}{G_1+G_2+G_3}\cdot U_{23} = I_{31} - I_{23}.$$

W ten sposób otrzymaliśmy składniki prądów I_1, I_2, I_3 płynące w gałęziach trójkąta I_{12}, I_{23}, I_{31}. Oznacza to, że wyrażenia ułamkowe występujące przy U_{12}, U_{23} oraz U_{31} reprezentują konduktancje gałęzi trójkąta:

$$\boxed{G_{12} = \frac{G_1\cdot G_2}{G_1+G_2+G_3},\ G_{23} = \frac{G_2\cdot G_3}{G_1+G_2+G_3},\ G_{31} = \frac{G_3\cdot G_1}{G_1+G_2+G_3}},$$

lub przechodząc na rezystancje

$$\frac{1}{R_{12}} = \frac{\dfrac{1}{R_1\cdot R_2}}{\dfrac{1}{R_1}+\dfrac{1}{R_2}+\dfrac{1}{R_3}},\quad \frac{1}{R_{23}} = \frac{\dfrac{1}{R_2\cdot R_3}}{\dfrac{1}{R_1}+\dfrac{1}{R_2}+\dfrac{1}{R_3}},\quad \frac{1}{R_{23}} = \frac{\dfrac{1}{R_2\cdot R_3}}{\dfrac{1}{R_1}+\dfrac{1}{R_2}+\dfrac{1}{R_3}}$$

czyli

$$\boxed{R_{12} = R_1 + R_2 + \frac{R_1\cdot R_2}{R_3},\quad R_{23} = R_2 + R_3 + \frac{R_2\cdot R_3}{R_1},\quad R_{31} = R_3 + R_1 + \frac{R_3\cdot R_1}{R_2}}.$$

W celu uzyskania wzorów dla przekształcenia trójkąta na gwiazdę obliczymy kilka pomocniczych wielkości:

$$R_{12}+R_{23}+R_{31}=2R_1+2R_2+2R_3+\frac{R_1\cdot R_2}{R_3}+\frac{R_2\cdot R_3}{R_1}+\frac{R_3\cdot R_1}{R_2};$$

$$R_{12}\cdot R_{23}=\left(R_1+R_2+\frac{R_1\cdot R_2}{R_3}\right)\left(R_2+R_3+\frac{R_2\cdot R_3}{R_1}\right)=$$

$$=R_1\cdot R_2+R_1\cdot R_3+R_2\cdot R_3+R_2^2+R_2\cdot R_3+\frac{R_2^2\cdot R_3}{R_1}+\frac{R_1\cdot R_2^2}{R_3}+R_1\cdot R_2+R_2^2=$$

$$=R_2\cdot\left(2R_1+2R_2+2R_3+\frac{R_1\cdot R_2}{R_3}+\frac{R_2\cdot R_3}{R_1}+\frac{R_3\cdot R_1}{R_2}\right);$$

$$R_{23}\cdot R_{31}=\left(R_2+R_3+\frac{R_2\cdot R_3}{R_1}\right)\left(R_3+R_1+\frac{R_3\cdot R_1}{R_2}\right)=$$

$$=R_2\cdot R_3+R_2\cdot R_1+R_3\cdot R_1+R_3^2+R_3\cdot R_1+\frac{R_3^2\cdot R_1}{R_2}+\frac{R_2\cdot R_3^2}{R_1}+R_2\cdot R_3+R_3^2=$$

$$=R_3\cdot\left(2R_2+2R_3+2R_1+\frac{R_2\cdot R_3}{R_1}+\frac{R_3\cdot R_1}{R_2}+\frac{R_1\cdot R_2}{R_3}\right);$$

$$R_{31}\cdot R_{12}=\left(R_3+R_1+\frac{R_3\cdot R_1}{R_2}\right)\left(R_1+R_2+\frac{R_1\cdot R_2}{R_3}\right)=$$

$$=R_3\cdot R_1+R_3\cdot R_2+R_1\cdot R_2+R_1^2+R_1\cdot R_2+\frac{R_1^2\cdot R_2}{R_3}+\frac{R_3\cdot R_1^2}{R_2}+R_3\cdot R_1+R_1^2=$$

$$=R_1\cdot\left(2R_3+2R_1+2R_2+\frac{R_3\cdot R_1}{R_2}+\frac{R_1\cdot R_2}{R_3}+\frac{R_2\cdot R_3}{R_1}\right);$$

Z wyliczonych wielkości pomocniczych widać, że:

$$\boxed{R_1=\frac{R_{31}\cdot R_{12}}{R_{12}+R_{23}+R_{31}},\ R_2=\frac{R_{12}\cdot R_{23}}{R_{12}+R_{23}+R_{31}},\ R_3=\frac{R_{23}\cdot R_{31}}{R_{12}+R_{23}+R_{31}}}.$$

Podobnie jak poprzednio uzyskujemy wzory dla konduktancji:

$$\boxed{G_1=G_{12}+G_{31}+\frac{G_{12}\cdot G_{31}}{G_{23}},\quad G_2=G_{23}+G_{21}+\frac{G_{23}\cdot G_{21}}{G_{31}},\quad G_3=G_{31}+G_{23}+\frac{G_{31}\cdot G_{23}}{G_{12}}}.$$

Przypadek szczególny (równe rezystancje gwiazdy): $R_1=R_2=R_3=R_Y$, czyli: $G_1=G_2=G_3=G_Y$:

$$\boxed{R_\Delta=3\cdot R_Y,\quad G_Y=3\cdot G_\Delta}.$$

Opracowano na podst.: T. Cholewicki „Elektrotechnika teoretyczna”, tom I, WNT.