OBLICZANIE WRAŻLIWOŚCI W DZIEDZINIE CZASU

Metoda układu dołączonego do obliczenia wrażliwości układu dynamicznego w dziedzinie czasu. Wyznaczane będą zmiany prądów i napięć spowodowane pewnym parametrem:

$\partial u_0(t_f)/\partial x_j$, $\partial i_0(t_f)/\partial x_j$, x_j - jest parametrem elementu, np. R, L, C, g_m itd.

Twierdzenie Tellegena uogólnione na funkcje czasu:

$$\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}(t)\,\boldsymbol{i}^{+}(\tau) = \boldsymbol{i}^{\mathrm{T}}(t)\,\boldsymbol{u}^{+}(\tau) = \boldsymbol{i}^{+\mathrm{T}}(\tau)\,\boldsymbol{u}(t) = \boldsymbol{u}^{+\mathrm{T}}(\tau)\,\boldsymbol{i}(t) = 0$$

Brak fizycznego znaczenia tych iloczynów.

$$\boldsymbol{i}^{+\mathrm{T}}(\tau)\Delta\boldsymbol{u}(t) = 0$$

$$\boldsymbol{u}^{+\mathrm{T}}(\tau)\Delta\boldsymbol{i}(t) = 0$$

$$\boldsymbol{i}^{+\mathrm{T}}(\tau)\Delta\boldsymbol{u}(t) - \boldsymbol{u}^{+\mathrm{T}}(\tau)\Delta\boldsymbol{i}(t) = 0$$

$$-\boldsymbol{i}_{\mathrm{p}}^{+\mathrm{T}}(\tau)\Delta\boldsymbol{u}_{\mathrm{p}}(t)+\boldsymbol{u}_{\mathrm{p}}^{+\mathrm{T}}(\tau)\Delta\boldsymbol{i}_{\mathrm{p}}(t)= \boldsymbol{i}_{\mathrm{g}}^{+\mathrm{T}}(\tau)\Delta\boldsymbol{u}_{\mathrm{g}}(t)-\boldsymbol{u}_{\mathrm{g}}^{+\mathrm{T}}(\tau)\Delta\boldsymbol{i}_{\mathrm{g}}(t)$$

W szczególności równania te są słuszne dla czasu $\tau = t_f - t$, gdzie t_f jest chwilą, dla której wyznacza się u_0 oraz i_0. Całka ostatniego równania od $t = 0$ do $t = t_f$ daje :

$$\int_0^{t_f}[-\boldsymbol{i}_{\mathrm{p}}^{+\mathrm{T}}(\tau)\Delta\boldsymbol{u}_{\mathrm{p}}(t) + \boldsymbol{u}_{\mathrm{p}}^{+\mathrm{T}}(\tau)\Delta\boldsymbol{i}_{\mathrm{p}}(t)\,]_{\tau=t_f-t}\,\mathrm{d}t =$$

$$= \int_0^{t_f}[\boldsymbol{i}_{\mathrm{g}}^{+\mathrm{T}}(\tau)\Delta\boldsymbol{u}_{\mathrm{g}}(t)-\boldsymbol{u}_{\mathrm{g}}^{+\mathrm{T}}(\tau)\Delta\boldsymbol{i}_{\mathrm{g}}(t)\,]_{\tau=t_f-t}\,\mathrm{d}t$$

W celu wyznaczenia tych całek należy dokonać analizy czasowej układów $\mathbb{N}$ i $\mathbb{N}^+$ i obliczyć potrzebne prądy i napięcia.
Obwód oryginalny jest analizowany w czasie bieżącym $0 \le t \le t_f$, $t \in [0\,,\, t_f]$
obwód dołączony jest analizowany w czasie wstecznym $0 \le \tau \le t_f$, $t \in [t_f\,,\,0]$
Prawa strona tego równania przedstawiona w postaci skalarnej:

$$\sum_{k=1}^{g}\int_0^{t_f}[i_{\mathrm{bk}}^{+}(\tau)\Delta\, u_{\mathrm{bk}}(t) - u_{\mathrm{bk}}^{+}(\tau)\Delta i_{\mathrm{bk}}(t)]_{\tau=t_f-t}\,\mathrm{d}t$$

Wyznaczanie całek dla wybranych typów gałęzi :

Gałąź rezystancyjna $u(t) = R\,i(t)$, $u^+(\tau) = R\,i^+(\tau)$

$$\int_0^{t_f}[i^+(\tau)\Delta u(t) - u^+(\tau)\Delta i(t)]_{\tau=t_f-t}\mathrm{d}t =$$

$$= \int_0^{t_f}\left[i^+(\tau)[R\,\Delta i(t) + i(t)\,\Delta R] - R\,i^+(\tau)\Delta i(t)\right]_{\tau=t_f-t}\mathrm{d}t =$$

$$= \Delta R\int_0^{t_f}[i^+(\tau)\,i(t)]_{\tau=t_f-t}\,\mathrm{d}t$$

Gałąź pojemnościowa $i(t) = \mathrm{d}q/\mathrm{d}t$, $q(t) = C\,u(t)$, $i^{+}(\tau) = \mathrm{d}q^{+}(\tau)/\mathrm{d}\tau$, $q^{+}(\tau) = C\,u^{+}(\tau)$;

$$\int_0^{t_\mathrm{f}} [i^{+}(\tau)\Delta u(t) - u^{+}(\tau)\Delta i(t)]_{\tau=t_\mathrm{f}-t}\mathrm{d}t =$$

$$= \int_0^{t_\mathrm{f}} \left[i^{+}(\tau)\Delta u(t) - u^{+}(\tau)\left[\Delta\frac{\partial q}{\partial t}\right]\right]_{\tau=t_\mathrm{f}-t} \mathrm{d}t =$$

$$= \int_0^{t_\mathrm{f}} \left(i^{+}(\tau)\Delta u(t) - u^{+}(\tau)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[C\,\Delta u(t) + u(t)\,\Delta C]\right)_{\tau=t_\mathrm{f}-t} \mathrm{d}t =$$

$$= \int_0^{t_\mathrm{f}} \left(i^{+}(\tau)\,\Delta u(t) - u^{+}(\tau)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[\,C\,\Delta u(t) + u(t)\,\Delta C]\right)_{\tau=t_\mathrm{f}-t} \mathrm{d}t = \upsilon_1 + \upsilon_2 + \upsilon_3$$

Wartości kolejnych całek, poczynając od υ_3 wynoszą :

$$\upsilon_3 = -\int_0^{t_\mathrm{f}} \left[u^{+}(\tau)\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}\,\Delta C\right]_{\tau=t_\mathrm{f}-t} \mathrm{d}t = -\,\Delta C\int_0^{t_\mathrm{f}} \left[u^{+}(\tau)\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}\right]_{\tau=t_\mathrm{f}-t} \mathrm{d}t$$

Całki $\upsilon_1 + \upsilon_2$ oblicza się całkując przez części υ_2 :

$$\upsilon_1 + \upsilon_2 = \int_0^{t_\mathrm{f}} \left[i^{+}(\tau)\Delta\,u(t) - \frac{\mathrm{d}u^{+}(\tau)}{\mathrm{d}\tau} C\Delta\,u(t)\right]_{\tau=t_\mathrm{f}-t} \mathrm{d}t + \left(\left[u^{+}(\tau)\,C\,\Delta u(t)\right]_{\tau=t_\mathrm{f}-t} \right)_0^{t_\mathrm{f}} =$$

$$= \int_0^{t_f} \left[i^{+}(\tau)\,\Delta\,u(t) \text{ - } i^{+}(\tau)\Delta u(t)\right]_{\tau=t_\mathrm{f}-t} \mathrm{d}t - C\,u^{+}(0)\,\Delta u(t_\mathrm{f}) + Cu^{+}(t_\mathrm{f})\,\Delta u(0) =$$

$$= -C\,u^{+}(0)\,\Delta\,u(t_\mathrm{f}) + C\,u^{+}(t_\mathrm{f})\,\Delta u(0)$$

Warunki pocz. na kondensatorach układu $\mathbb{N}^{+}$ przyjmuje się zerowe: $u_\mathrm{c}^{+}(\tau) = 0$ dla $\tau = 0$.
Napięcie początkowe jest stałe, gdy inne parametry się zmieniają. Wtedy $\Delta u(0) = 0$ i :

$$\int_0^{t_\mathrm{f}} [i^{+}(\tau)\Delta u(t) - u^{+}(\tau)\Delta i(t)]_{\tau=t_\mathrm{f}-t}\mathrm{d}t = -\,\Delta C\int_0^{t_\mathrm{f}} \left[u^{+}(\tau)\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}\right]_{\tau=t_\mathrm{f}-t} \mathrm{d}t\,.$$

Dla gałęzi indukcyjnych wyprowadzenie jest dualne.

Dla lewej strony równania, związanej z niezależnymi źródłami :
- napięcie wyjściowe jest napięciem na niezależnym źródle prądowym,
- prąd wyjściowy jest prądem w niezależnym źródle napięciowym.

Pobudzenie układu $\mathbb{N}^{+}$ wybierane jest tak, aby lewa strona równania zawierała tylko składnik będący zmianą szukanej wielkości w chwili $t = t_\mathrm{f}$. Na ogół jest to impuls Diraca. Inne źródła niezależne w $\mathbb{N}^{+}$ są równe zeru. Na przykład :
- chcąc obliczyć $u_{\mathrm{p}3}(t_\mathrm{f})$ należy przyjąć $i_{\mathrm{p}3}^{+}(\tau) = -\delta(\tau)$. Lewa strona jest wtedy równa:

$$\int_0^{t_\mathrm{f}} [-\boldsymbol{i}_\mathrm{p}^{+\mathrm{T}}(\tau)\Delta\boldsymbol{u}_\mathrm{p}(t) + \boldsymbol{u}_\mathrm{p}^{+\mathrm{T}}(\tau)\Delta\boldsymbol{i}_\mathrm{p}(t)]_{\tau=t_\mathrm{f}-t}\mathrm{d}t = -\int_0^{t_\mathrm{f}} \left[i_{\mathrm{p}3}^{+}(\tau)\Delta u_{\mathrm{p}3}(\mathrm{t})\right]_{\tau=t_\mathrm{f}-t}\mathrm{d}t = \int_0^{t_\mathrm{f}}\delta(t-t_\mathrm{f})\Delta u_{\mathrm{p}3}(t)\mathrm{d}t = \Delta u_{\mathrm{p}3}(t_\mathrm{f})\,.$$

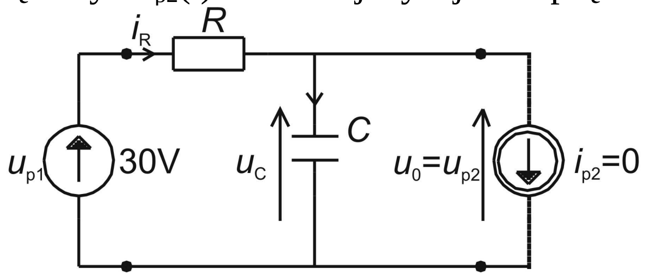
SKŁADNIKI WRAŻLIWOŚCI W DZIEDZINIE CZASU

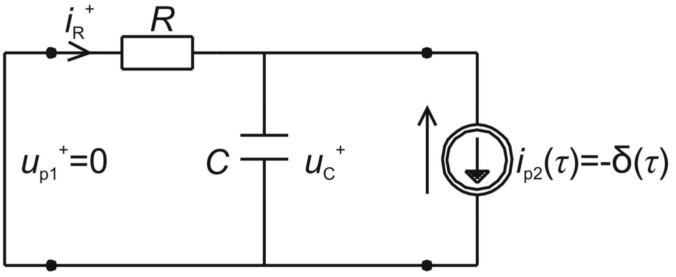
Typ elementu	Opis elementu	Składnik wrażliwościowy $\int_0^{t_f}[i^+(\tau)\Delta u(t) - u^+(\tau)\Delta i(t)]_{\tau=t_f-t}\mathrm{d}t$
R	$u_R = R\,i_R$	$\Delta R\int_0^{t_f}[i_R^+(\tau)\,i_R(t)]_{\tau=t_f-t}\,\mathrm{d}t$
C	$i_C = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}, q = C\,u_C$	$-\Delta C\int_0^{t_f}\left[u_C^+(\tau)\,\frac{\mathrm{d}u_C(t)}{\mathrm{d}t}\right]_{\tau=t_f-t}\mathrm{d}t$
G	$i_G = G\,u_G$	$-\Delta G\int_0^{t_f}[u_G^+(\tau)u_G(t)]_{\tau=t_f-t}\,\mathrm{d}t$
L	$u_L = \frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t},\ \Phi = L\,i_L$	$-\Delta L\int_0^{t_f}\left[i_L^+(\tau)\,\frac{\mathrm{d}i_L(t)}{\mathrm{d}t}\right]_{\tau=t_f-t}\mathrm{d}t$
μ	$u_2 = \mu\,u_1,\ i_1 = 0$	$\Delta\mu\int_0^{t_f}[i_2^+(\tau)\,u_1(t)]_{\tau=t_f-t}\,\mathrm{d}t$
β	$i_2 = \beta\,i_1,\ u_1 = 0$	$-\Delta\beta\int_0^{t_f}[u_2^+(\tau)i_1(t)]_{\tau=t_f-t}\,\mathrm{d}t$
g_m	$i_2 = g_m\,u_1,\ u_1 = 0$	$-\Delta g_m\int_0^{t_f}[u_2^+(\tau)\,u_1(t)]_{\tau=t_f-t}\,\mathrm{d}t$
r_m	$u_2 = r_m\,i_1,\ u_1 = 0$	$\Delta r_m\int_0^{t_f}[i_2^+(\tau)\,i_1(t)]_{\tau=t_f-t}\,\mathrm{d}t$
T	$u_2 = n\,u_1,\ i_1 = -n\,i_2$	$\Delta n\int_0^{t_f}[i_2^+(\tau)\,u_1(t) + u_1^+(\tau)\,i_2(t)]_{\tau=t_f-t}\,\mathrm{d}t$

Przykład

W układzie na rysunku $u_C(0) = 10\text{V}$ i $u_{p1} = 30\text{V}$. Wyznaczyć: $\partial u_0(t_f)/\partial R$ i $\partial u_0(t_f)/\partial C$.

Napięcie wyjściowe $u_0(t)$ zaznaczono na schemacie jako napięcie $u_{p2}(t)$ na niezależnym źródle prądowym $i_{p2}(t)$ o zerowej wydajności prądowej.





Rozwiązanie :

1. Analiza czasowa obwodu oryginalnego $\mathbb{N}$:

$$i_R(t) = \frac{20}{R}\mathrm{e}^{-\frac{t}{RC}}\ ,\ u_C(t) = 30 - 20\mathrm{e}^{-\frac{t}{RC}}\ \ ,\ \frac{\mathrm{d}u_C(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{20}{RC}\mathrm{e}^{-\frac{t}{RC}}\ .$$

2. Układ dołączony $\mathbb{N}^+$ widoczny jest na rysunku po prawej stronie.

3. Analiza czasowa układu dołączonego $\mathbb{N}^+$:

$$i_R^+(\tau) = -\frac{1}{RC}\mathrm{e}^{-\frac{\tau}{RC}},\ \ u_C^+(\tau) = -\frac{1}{C}\mathrm{e}^{-\frac{\tau}{RC}}$$

4. Składniki wrażliwości według tabeli :

Dla R :

$$\Delta R\int_0^{t_f}\left[\frac{20}{R}\mathrm{e}^{-\frac{t}{RC}}\left(-\frac{1}{RC}\mathrm{e}^{-\frac{\tau}{RC}}\right)\right]_{\tau=t_f-t}\mathrm{d}t = -\Delta R\,\frac{20t_f}{R^2C}\mathrm{e}^{-\frac{t_f}{RC}}$$

Dla C :

$$-\Delta C\int_0^{t_f}\left[\frac{20}{RC}\mathrm{e}^{-\frac{t}{RC}}\,\frac{1}{C}\mathrm{e}^{-\frac{\tau}{RC}}\right]_{\tau=t_f-t}\mathrm{d}t = -\Delta C\,\frac{20t_f}{RC^2}\mathrm{e}^{-\frac{t_f}{RC}}$$

5.

$$\Delta\,u_0(t_f) = -\Delta R\,\frac{20\,t_f}{R^2C}\mathrm{e}^{-\frac{t_f}{RC}} - \Delta C\,\frac{20\,t_f}{RC^2}\mathrm{e}^{-\frac{t_f}{RC}}$$

ostatecznie otrzymuje się :

$$\frac{\partial u_0(t_f)}{\partial R} = -\ \frac{20\,t_f}{R^2C}\mathrm{e}^{-\frac{t_f}{RC}}$$

$$\frac{\partial u_0(t_f)}{\partial C} = -\ \frac{20\,t_f}{RC^2}\mathrm{e}^{-\frac{t_f}{RC}}$$

Poprawność otrzymanych wrażliwości można sprawdzić przez zróżniczkowanie względem R i C wyrażenia :

$$u_0(t_f) = 30 - 20\mathrm{e}^{-\frac{t_f}{RC}}$$

PROCEDURA OBLICZANIA WRAŻLIWOŚCI W DZIEDZINIE CZASU

1. Analiza czasowa układu $\mathbb{N}$ w przedziale czasu $t = [0, t_f]$.
Wyznaczenie $i(t)$, $u(t)$ dla gałęzi rezystancyjnych,
$du(t)/dt$ dla pojemnościowych i $di(t)/dt$ dla indukcyjnych.

2. Utworzenie układu $\mathbb{N}^+$ przy dwóch warunkach:
- napięcia na C i prądy w L równają się zeru dla $\tau = 0$ oraz
- wszystkie źródła niezależne = 0, za wyjątkiem:
$i_{pk}^+(\tau)=-\delta(\tau)$ gdy obliczane jest $\Delta u_{pk}(t_f)$ lub
$u_{pk}^+(\tau)= \delta(\tau)$ gdy obliczane jest $\Delta i_{pk}(t_f)$.

3. Analiza czasowa układu $\mathbb{N}^+$ w przedziale $\tau = [0, t_f]$.
Wyznaczenie $i^+(\tau)$, $u^+(\tau)$ dla gałęzi rezystancyjnych,
$u^+(\tau)$ dla pojemnościowych oraz $i^+(\tau)$ dla indukcyjnych.

4. Wyznaczenie składników wrażliwości na podstawie podanych równań i tabeli.

5. Wyznaczenie $\partial u_0(t_f)/\partial x_j$ lub $\partial i_0(t_f)/\partial x_j$ dla małych zmian Δx_j .

Podsumowanie

1. Aby określić pochodne cząstkowe wybranej wielkości względem wszystkich parametrów wystarczy dwukrotnie dokonać analizy czasowej układu $\mathbb{N}$ w czasie bieżącym i układu $\mathbb{N}^+$ w czasie wstecznym.

2. Rozwiązanie dla układu $\mathbb{N}$ musi być pamiętane we wszystkich chwilach czasowych. Natomiast wartości z układu $\mathbb{N}^+$ mogą być podstawiane na bieżąco.

3. Do określenia $\partial u(t)/\partial t$ dla gałęzi pojemnościowych oraz $\partial i(t)/\partial t$ dla indukcyjnych można zastosować metodę zmiennych stanu.