ROZWIĄZYWANIE UKŁADÓW RÓWNAŃ

Liczba równań $N = 10$

Ilość operacji przy rozwiązywaniu:

Metoda:		
	Cramera	$(N-1)(N+1)! = 360\,000\,000$
	Gaussa-Jordana	$N^3/2 = 500$
	eliminacji Gaussa i **LU**	$N^3/3 = 330$

Układ n liniowych równań o stałych współczynnikach:

$$\begin{array}{c} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_n + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{array}$$

w postaci macierzowej:

$\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$

gdzie: $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $\boldsymbol{b} = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ oraz

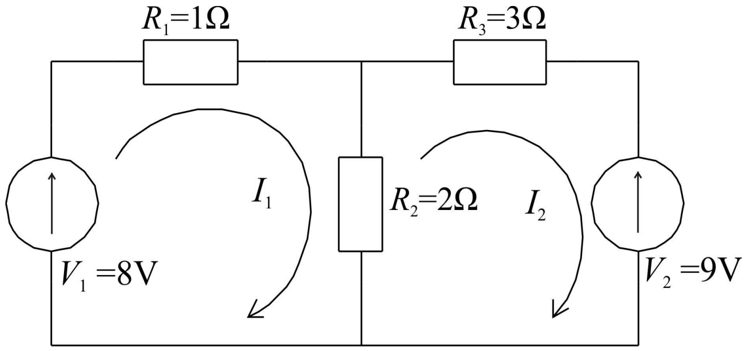
$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Metoda Gaussa-Jordana

$$\begin{array}{c} 1\cdot x_1 + 0\cdot x_2 + \ldots + 0\cdot x_n = b_1^* \\ 0\cdot x_1 + 1\cdot x_2 + \ldots + 0\cdot x_n = b_2^* \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ 0\cdot x_1 + 0\cdot x_2 + \ldots + 1\cdot x_n = b_n^* \end{array}$$

Współczynniki zapisuje się w tzw. macierzy rozszerzonej $N\times(N+1)$:

$$\boldsymbol{A}^* = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & | & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{1n} & | & b_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} & | & b_n \end{bmatrix}$$



Rozwiązanie metodą oczkową:

$3I_1 - 2I_2 = 8$

$-2I_1 + 5I_2 = -9$

$$\boldsymbol{A}^* = \begin{bmatrix} 3 & -2 & | & 8 \\ -2 & 5 & | & -9 \end{bmatrix}$$

$$A_1^* = \begin{bmatrix} 1 & -2/3 & | & 8/3 \\ -2 & 5 & | & -9 \end{bmatrix}$$

$$A_2^* = \begin{bmatrix} 1 & -2/3 & | & 8/3 \\ -2-(-2)*1 & 5-(-2)\times(-2/3) & | & -9-(-2)\times 8/3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2/3 & | & 8/3 \\ 0 & 11/3 & | & -11/3 \end{bmatrix}$$

$$A_3^* = \begin{bmatrix} 1 & -2/3 & | & 8/3 \\ 0 & 1 & | & -1 \end{bmatrix}$$

$$A_4^* = \begin{bmatrix} 1 & -2/3-(-2/3\times 1) & | & 8/3-(-2/3\times(-1)) \\ 0 & 1 & | & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & | & 2 \\ 0 & 1 & | & -1 \end{bmatrix}$$

Metoda eliminacji Gaussa

Układ równań :

$$\begin{array}{l} a_{11}\,x_1 + a_{12}\,x_2 + \ldots + a_{1n}\,x_n = b_1 \\ a_{21}\,x_1 + a_{22}\,x_2 + \ldots + a_{2n}\,x_n = b_2 \\ \quad . \qquad . \qquad\qquad . \qquad . \\ \quad . \qquad . \qquad\qquad . \qquad . \\ \quad . \qquad . \qquad\qquad . \qquad . \\ a_{n1}\,x_1 + a_{n2}\,x_2 + \ldots + a_{nn}\,x_n = b_n \end{array}$$

Po eliminacji :

$$\begin{array}{llllll} 1\cdot x_1 & +a_{12}^1 x_2 & + & \ldots & +a_{1n}^1 x_n & = & b_1^1 \\ & 1\cdot x_2 & + & \ldots & +a_{2n}^2 x_n & = & b_2^2 \\ & & & & . & & . \\ & & & & . & & . \\ & & & & 1\cdot x_n & = & b_n^n \end{array}$$

Wskaźniki górne przy a_{ij} i b_i oznaczają kolejną modyfikację współczynników równań.
W procedurze tej stosuje się wzory rekurencyjne do obliczania współczynników :

$$a_{jk}^i = a_{jk}^{i-1} - a_{ij}^{i-1} a_{ik}^{i-1} \qquad \text{oraz} \qquad b_j^i = b_j^{i-1} - a_{ij}^{i-1}\, b_i^{i-1}$$

$$a_{ik}^{i-1} = a_{ik}^{i-1} / a_{ii}^{i-1} \qquad\qquad b_i^{i-1} = b_i^{i-1} / a_{ii}^{i-1}$$

$$A^* = \begin{bmatrix} 3 & -2 & | & 8 \\ -2 & 5 & | & -9 \end{bmatrix} \qquad A_1^* = \begin{bmatrix} 1 & -2/3 & | & 8/3 \\ -2 & 5 & | & -9 \end{bmatrix}$$

$$A_2^* = \begin{bmatrix} 1 & -2/3 & | & 8/3 \\ -2+2*1 & 5+2*(-2/3) & | & -9+2*8/3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2/3 & | & 8/3 \\ 0 & 3\,\dfrac{2}{3} & | & -3\,\dfrac{2}{3} \end{bmatrix} \qquad A_3^* = \begin{bmatrix} 1 & -2/3 & | & 8/3 \\ 0 & 1 & | & -1 \end{bmatrix}$$

$x_2 = -1$, $x_1 + 2/3 = 8/3$, czyli $x_1 = 2$.

Metoda rozkładu LU

Gdy wymagane jest wielokrotne rozwiązywanie układu równań $\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ przy niezmiennej $\boldsymbol{A}$:

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{L}\,\boldsymbol{U}$$

$$\boldsymbol{L} = \begin{bmatrix} l_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 & \dots & 0 \\ . & & & & . \\ . & & & & . \\ l_{n1} & l_{n2} & l_{n3} & \dots & l_{nn} \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{U} = \begin{bmatrix} 1 & u_{12} & u_{13} & \dots & u_{1n} \\ 0 & 1 & u_{23} & \dots & u_{2n} \\ . & & & & . \\ . & & & & . \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{L}\cdot\boldsymbol{U}\,\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$$
$$\boldsymbol{U}\cdot\boldsymbol{x} = \boldsymbol{d}$$
$$\boldsymbol{L}\cdot\boldsymbol{d} = \boldsymbol{b}$$

I. wyliczenie wektora $\boldsymbol{d}$ z ostatniego układu równań

II. wyznaczenie $\boldsymbol{x}$ z poprzedniego równania, etap analogiczny do podstawienia wstecz przy elim.

Podstawienie w przód - etap I: $\boldsymbol{Ld} = \boldsymbol{b}$:

$$\begin{array}{lllllll} l_{11}d_1 & & & & & = & b_1 \\ l_{21}d_1 & + & l_{22}d_2 & & & = & b_2 \\ . & & & & & & . \\ . & & & & & & . \\ l_{n1}d_1 & + & l_{n2}d_2 & + & \dots\ +l_{nn}d_n & = & b_n \end{array}$$

stąd mamy:

$d_1 = b_1 / l_{11}$

$d_2 = (b_2 - l_{21}d_1)\, l_{22}$ ......

Ogólnie:

$$d_k = \left(b_k - \sum_{j=1}^{k-1} l_{kj} d_j \right) / \, l_{kk}\,,\ k = 1, 2, \dots, n$$

Podstawienie wstecz - etap II: $\boldsymbol{Ux} = \boldsymbol{d}$:

$$\begin{array}{llllllll} 1x_1 & +u_{12}x_2 & + & \dots & +u_{1n}x_n & = & d_1 \\ & 1\,x_2 & + & \dots & +u_{2n}x_n & = & d_2 \\ & & & & . & & . \\ & & & & . & & . \\ & & 1x_{n-1} & + & +u_{n-1n}x_n & = & d_{n-1} \\ & & & & 1x_n & = & d_n \end{array}$$

stąd mamy:

$x_n = d_n$

$x_{n-1} = d_{n-1} - u_{n-1,n}x_n$

. . .

Ogólnie:

$$x_k = d_k - \sum_{j=k+1}^{n} u_{kj} x_j\,,\ \ j = n, n-1, n-2, \dots, 2, 1$$

Macierze $\boldsymbol{L}$ i $\boldsymbol{U}$ można zapisać w pamięci operacyjnej w miejsce $\boldsymbol{A}$.

Macierz $\boldsymbol{U}$ jest produktem eliminacji Gaussa:

$$\boldsymbol{U} = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{2}{3} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{d} = \begin{bmatrix} \frac{8}{3} \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 8 \\ -9 \end{bmatrix}.$$

Natomiast elementy macierzy $\boldsymbol{L}$ są uzyskiwane w trakcie eliminacji: (I kolumna)

$$\boldsymbol{L} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -2 & 11/3 \end{bmatrix}.$$