TWIERDZENIE TELLEGENA

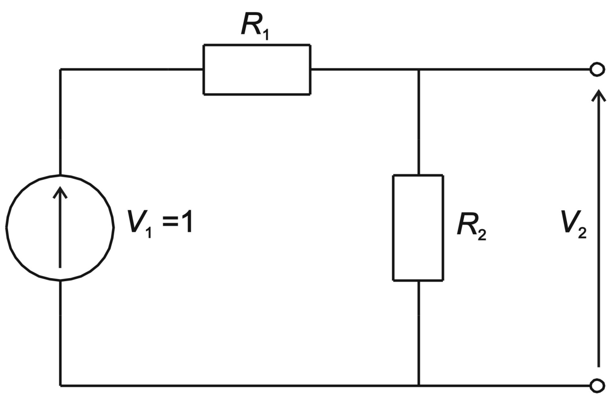
Definicje wrażliwości małoprzyrostowej

Wrażliwość bezwzględna: $$SB_x^P = \frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}x}$$

Wrażliwość względna: $$S_x^P = \frac{\mathrm{d}P/P}{\mathrm{d}x/x} = \frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}x}\frac{x}{P} = SB_x^P \frac{x}{P}$$

W niektórych przypadkach można wyznaczyć analitycznie.

Np., dla dzielnika napięciowego wrażliwości względne transmitancji napięciowej są:



$$\frac{V_2}{V_1} = V_2\Big|_{V_1=1} = \frac{R_2}{R_1+R_2}$$

$$S_{R_1}^{V_2} = \frac{-R_2}{\left(R_1+R_2\right)^2}\frac{R_1\left(R_1+R_2\right)}{R_2} = \frac{-R_1}{R_1+R_2}$$

$$S_{R_2}^{V_2} = \frac{R_1+R_2-R_2}{\left(R_1+R_2\right)^2}\frac{R_2\left(R_1+R_2\right)}{R_2} = \frac{R_1}{R_1+R_2}$$

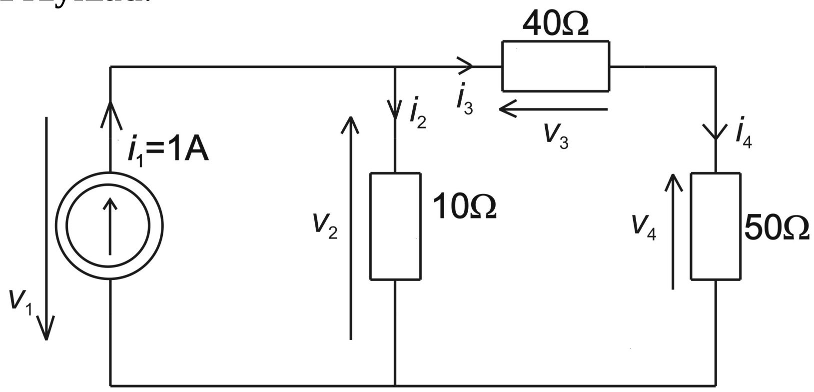
Uwaga na jednostki, uproszczenie wzoru przez pominięcie V_1 = 1V powoduje niezgodność jednostek! Jest to postępowanie często spotykane w dalszych wyprowadzeniach zależności do analizy wrażliwości.

TWIERDZENIE TELLEGENA DLA JEDNEGO I DWÓCH UKŁADÓW

Suma iloczynów prądów i napięć gałęziowych w układzie jest równa zeru:

$$\sum_{k=1}^{n_b} v_k i_k = 0,\ \mathrm{n_b}$$ - liczba gałęzi układu łącznie ze wzbudzeniami.

Przykład:

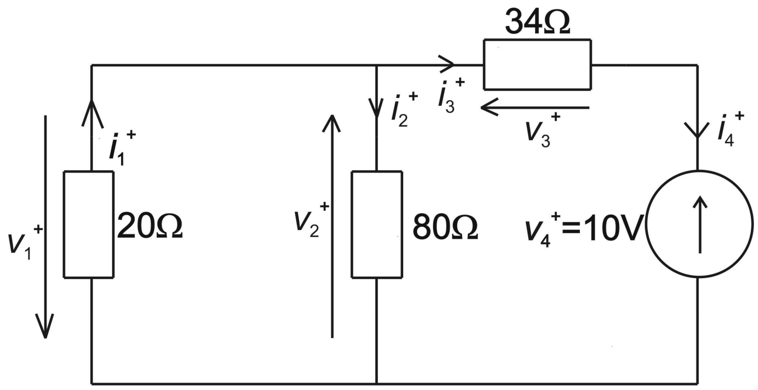


$$i_2 = 1 \cdot \frac{90}{100} = 0,9\mathrm{A}$$

$$i_3 = i_4 = 1 \cdot \frac{10}{100} = 0,1\mathrm{A}$$

i_1=1A, i_2=0,9A, i_3=0,1A, i_4=0,1A,
v_1=-9V, v_2=9V, v_3=4V, v_4=5V.

Bilans mocy w układzie: $v_1i_1+v_2i_2+v_3i_3+v_4i_4= 0$, $-9\cdot 1+9\cdot 0,9+4\cdot 0,1+5\cdot 0,1 = 0$.



Tw. Tellegena dla dwóch układów o tej samej topologii i liczbie gałęzi:

$$\sum_{k=1}^{n_b} v_k i_k^+ = 0,$$

oraz

$$\sum_{k=1}^{n_b} v_k^+ i_k = 0.$$

Analiza układu oznaczonego przez ($^+$) daje wyniki:

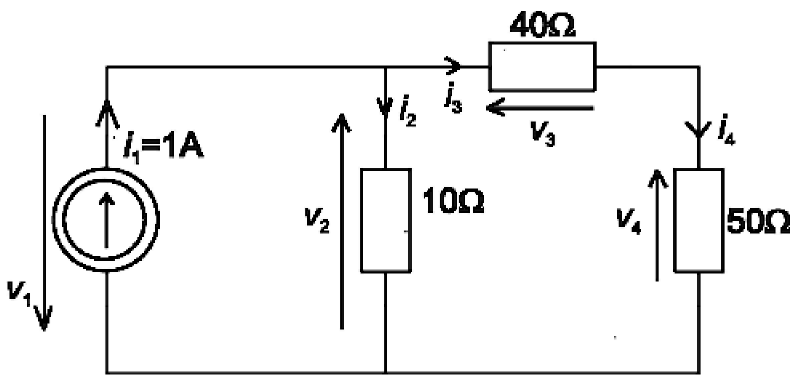
$$i_1^+ = -0,16\mathrm{A},\quad i_2^+ = 0,04\mathrm{A},\quad i_3^+ = -0,2\mathrm{A},\quad i_4^+ = -0,2\mathrm{A},$$
$$v_1^+ = -3,2\mathrm{V},\quad v_2^+ = 3,2\mathrm{V}\quad v_3^+ = -6,8\mathrm{V}\quad v_4^+ = 10\mathrm{V}.$$

Na podstawie twierdzenia Tellegena:

-9·(-0,16) + 9·(0,04) + 4·(-0,2) + 5·(-0,2) = 0, oraz analogicznie:
(-3,2)·1 + (3,2)·0,9 + (-6,8)·0,1 + (10)·0,1 = 0.

WYKORZYSTANIE MATHCADA DO ANALIZY OBYDWU OBWODÓW

Układ oryginalny



Dane:

$R2 := 10\cdot\Omega$

$R3 := 40\cdot\Omega$

$R4 := 50\cdot\Omega$

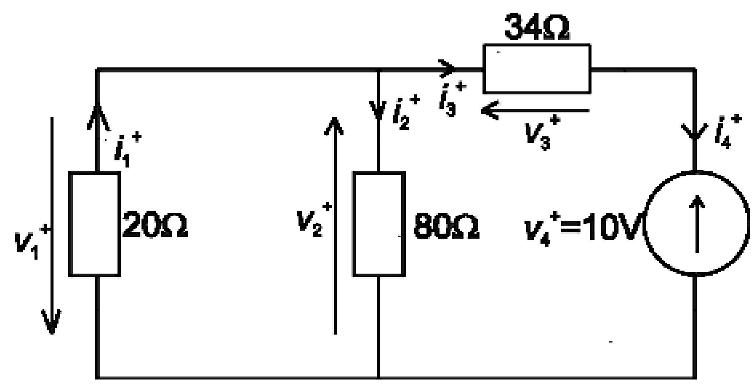
$I1 := 1\cdot A$

$R\_zast := \dfrac{R2\cdot(R3+R4)}{R2+R3+R4}$ $\quad V2 := R\_zast\cdot I1 = 9\,V$ $\quad V1 := -V2 = -9\,V$

$I2 := \dfrac{V2}{R2} = 0.9\,A$ $\quad I3 := \dfrac{V2}{R3+R4} = 0.1\,A$ $\quad V3 := I3\cdot R3 = 4\,V$ $\quad V4 := I3\cdot R4 = 5\,V$

Układ dołączony

Dane:



$R\_1 := 20\cdot\Omega$

$R\_2 := 80\cdot\Omega$

$R\_3 := 34\cdot\Omega$

$V\_4 := 10\cdot V$

$V\_2 := 0$ Giver rozwiązanie metodą węzłową

$$V\_2\cdot\left(\frac{1}{R\_1}+\frac{1}{R\_2}+\frac{1}{R\_3}\right) = \frac{V\_4}{R\_3}$$

$V\_2 := Find(V\_2)$ $\quad V\_2 = 3.2\,V$ $\quad V\_1 := -V\_2 = -3.2\,V$ $\quad V\_3 := V\_2 - V\_4 = -6.8\,V$

$I\_1 := \dfrac{V\_1}{R\_1} = -0.16\,A$ $\quad I\_2 := \dfrac{V\_2}{R\_2} = 0.04\,A$ $\quad I\_3 := \dfrac{V\_3}{R\_3} = -0.2\,A$ $\quad I\_4 := I\_3 = -0.2\,A$

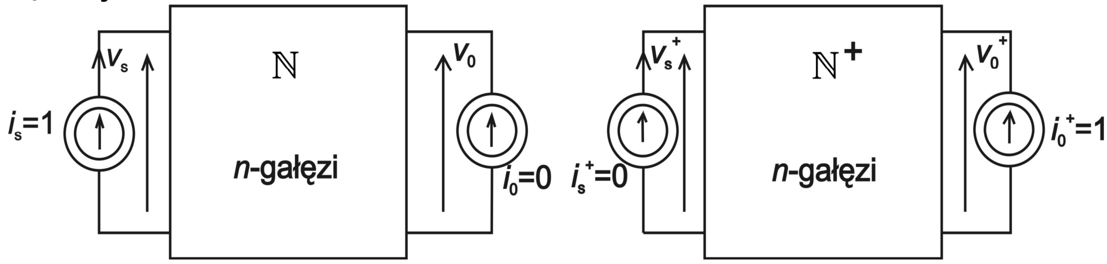
Sprawdzenie bilansu mocy (zgodnie z twierdzeniem Tellegena):

$V1\cdot I\_1 + V2\cdot I\_2 + V3\cdot I\_3 + V4\cdot I\_4 = 0\,W$

$V\_1\cdot I1 + V\_2\cdot I2 + V\_3\cdot I3 + V\_4\cdot I4 = 0\,W$

OBLICZANIE WRAŻLIWOŚCI PASYWNEGO I ODWRACALNEGO UKŁADU REZYSTANCYJNEGO

Rozważmy odwracalny układ rezystancyjny $\mathbb{N}$ posiadający n gałęzi z dołączonymi dwoma źródłami prądowymi:



Cały układ: n+2 gałęzie, i_s - (n+1), i_0 - (n+2). Dla k-tej gałęzi układu $\mathbb{N}$: $v_k = R_k i_k$, k=1,2,...,n.
Co się stanie, gdy rezystancja k ulegnie zaburzeniu?

$$R_k + \Delta R_k \quad \rightarrow \quad v_0\ ?$$

$v_k + \Delta v_k = (R_k + \Delta R_k) (i_k + \Delta i_k)$, $\quad v_k + \Delta v_k = R_k i_k + \Delta R_k i_k + R_k \Delta i_k + \Delta R_k\, \Delta i_k$, $k = 1,2,...,n$.
Pomińmy małe drugiego rzędu: $\quad \Delta v_k \approx \Delta R_k i_k + R_k \Delta i_k$.
Dodatkowo, przy wymuszeniu prądowym: $\Delta i_s = 0$ oraz $\Delta i_0 = 0$.

Twierdzenie Tellegena dla układów $\mathbb{N}$ oraz $\mathbb{N}^+$:

$$\sum_{k=1}^{n+2}\left(v_k + \Delta v_k\right) i_k^+ = 0 \ \text{ oraz } \ \sum_{k=1}^{n+2}\left(i_k + \Delta i_k\right) v_k^+ = 0 .$$

Uwzględniając znowu tw. Tellegena i łącząc obydwie zależności :

$$\sum_{k=1}^{n+2}\Delta v_k i_k^+ = 0 \ \text{ oraz } \ \sum_{k=1}^{n+2}\Delta i_k v_k^+ = 0, \ \text{ a dalej } \ \sum_{k=1}^{n+2}\left(\Delta v_k i_k^+ - \Delta i_k v_k^+\right) = 0 .$$

Wyodrębniając gałęzie "0" oraz "s" :

$$\Delta v_s i_s^+ - \Delta i_s v_s^+ + \Delta v_0 i_0^+ - \Delta i_0 v_0^+ + \sum_{k=1}^{n}\left(\Delta v_k i_k^+ - \Delta i_k v_k^+\right) = 0 .$$

Ponieważ $\Delta i_s = 0$ oraz $\Delta i_0 = 0$, a: $\Delta v_k = \Delta R_k i_k + R_k \Delta i_k$ sumę tą można przekształcić:

$$\Delta v_s i_s^+ - \Delta i_s v_s^+ + \Delta v_0 i_0^+ - \Delta i_0 v_0^+ + \sum_{k=1}^{n}\left[\left(\Delta R_k i_k + R_k \Delta i_k\right) i_k^+ - \Delta i_k v_k^+\right]$$

$$= \Delta v_s i_s^+ - \Delta i_s v_s^+ + \Delta v_0 i_0^+ - \Delta i_0 v_0^+ + \sum_{k=1}^{n}\left[\left(R_k i_k^+ - v_k^+\right)\Delta i_k + i_k i_k^+ \Delta R_k\right]$$

$$\nwarrow \ \textit{prawo Ohma}\,?$$

Przyjmujemy, że gałęzie rezystancyjne w obu układach są jednakowe: $\;v_k^+ = R_k i_k^+$.

$$\Delta v_s i_s^+ + \Delta v_0 i_0^+ + \sum_{k=1}^{n}\left(i_k i_k^+ \Delta R_k\right) = 0$$

Dodatkowo przyjmujemy, że $i_s^+ = 0$ oraz $i_0^+ = 1$, wtedy $\Delta v_0 = \sum_{k=1}^{n}\left(-i_k i_k^+ \Delta R_k\right)$.

Układ $\mathbb{N}^+$, w którym rezystory R_k odpowiadają rezystorom R_k w układzie $\mathbb{N}$ oraz w którym $i_0^+ = 1$, a : $i_s^+ = 0$ nazywany jest ***układem dołączonym*** względem układu $\mathbb{N}$.

Jeżeli zmianie o ΔR_j ulega tylko j-ty rezystor, a pozostałe są nie zmienione $\Delta R_k = 0$, to

$$\Delta v_0 = -i_j i_j^+ \Delta R_j ,$$

a wrażliwości bezwzględna i względna na zmiany R_j będą określone wzorami

$$SB_{R_j}^{v_0} = \frac{\Delta v_0}{\Delta R_j} = -i_j i_j^+ \quad \text{oraz} \quad S_{R_j}^{v_0} = \frac{\Delta v_0}{\Delta R_j}\frac{R_j}{v_0} = -i_j i_j^+ \frac{R_j}{v_0} .$$

ALGORYTM ANALIZY WRAŻLIWOŚCI METODĄ TELLEGENA:

1. Analiza układu oryginalnego $\mathbb{N}$ pobudzanego $i_s = 1$
2. Analiza układu dołączonego $\mathbb{N}^+$, takiego samego jak $\mathbb{N}$, lecz pobudzanego $i_0^+ = 1$.

Analogiczne zależności otrzymuje się dla zmian v_0 przy zmianach konduktancji G_k.
Dla pojedynczej gałęzi:

$$i_k = G_k v_k \quad \text{oraz} \quad \Delta i_k \approx \Delta G_k v_k + G_k \,\Delta v_k .$$

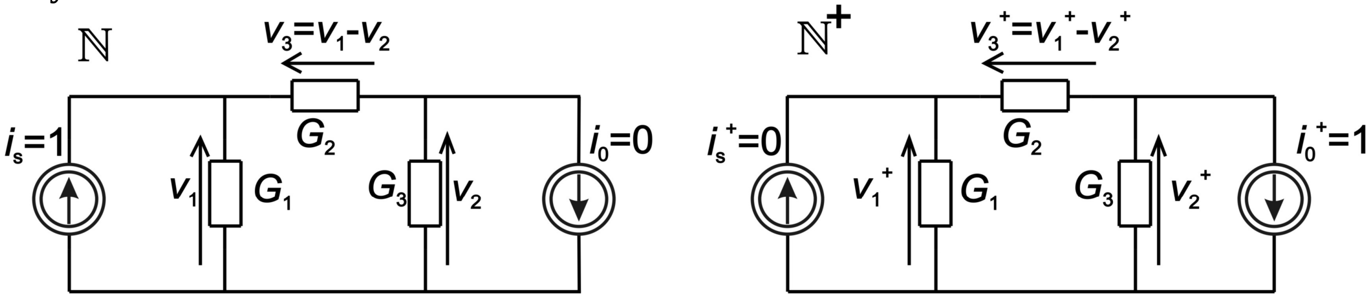
Postępując jak poprzednio uzyskuje się :

$$\Delta v_0 = v_j\, v_j^+\, \Delta G_j ,$$

oraz zależności dla bezwzględnej i względnej wrażliwości napięcia:

$$SB_{G_j}^{v_0} = \frac{\Delta v_0}{\Delta G_j} = -v_j v_j^+ \quad \text{oraz} \quad S_{G_j}^{v_0} = \frac{\Delta v_0}{\Delta G_j}\frac{G_j}{v_0} = -v_j v_j^+ \frac{G_j}{v_0} .$$

Przykład :



$(G_1 + G_2)\cdot v_1 - G_2 v_2 = 1$
$-G_2 v_1 + (G_2 + G_3)\cdot v_2 = 0$

$$v_1 = \frac{G_2+G_3}{\Delta},$$
$$v_0 = v_2 = \frac{G_2}{\Delta},$$
$$v_3 = v_1 - v_2 = \frac{G_3}{\Delta},$$

gdzie: $\Delta = G_1G_2 + G_3G_2 + G_1G_3$

$(G_1 + G_2)\cdot v_1^+ - G_2 v_2^+ = 0$
$-G_2 v_1^+ + (G_2 + G_3)\cdot v_2^+ = -1$

$$v_1^+ = \frac{-G_2}{\Delta},$$
$$v_0^+ = v_2^+ = \frac{-(G_1+G_2)}{\Delta},$$
$$v_3^+ = v_1^+ - v_2^+ = \frac{G_1}{\Delta},$$

gdzie: $\Delta = G_1G_2 + G_3G_2 + G_1G_3$

Wrażliwości bezwzględne wynoszą

$$\frac{\Delta v_0}{\Delta G_1} = v_1v_1^+ = \frac{-G_2(G_2+G_3)}{\Delta^2}, \frac{\Delta v_0}{\Delta G_2} = v_3v_3^+ = \frac{G_1G_3}{\Delta^2}, \frac{\Delta v_0}{\Delta G_3} = v_2v_2^+ = \frac{-G_2(G_1+G_2)}{\Delta^2}.$$

Obliczmy teraz analitycznie $\dfrac{\partial v_0}{\partial G_j}$, $j = 1,2,3$ z wyrażenia $\dfrac{v_0}{i_s} = v_0\Big|_{i_s=1}$

$$v_0 = v_2 = \frac{G_2}{G_1G_2 + G_3G_2 + G_1G_3}.$$

Wyznaczając pochodne v_0 względem G_j :

$$SB_{G_1}^{v_0} = \frac{\partial v_0}{\partial G_1} = \frac{-G_2(G_2+G_3)}{\Delta^2}, SB_{G_2}^{v_0} = \frac{\partial v_0}{\partial G_2} = \frac{G_1G_3}{\Delta^2}, SB_{G_3}^{v_0} = \frac{\partial v_0}{\partial G_3} = \frac{-G_2(G_1+G_2)}{\Delta^2}.$$

Dla wartości liczbowych $G_1 = 1$, $G_2 = 2$, $G_3 = 3$, $v_0 = v_2 = 2/11 = 0{,}181818$ otrzymuje się :

$$SB_{G_1}^{v_0} = -0{,}082644, \quad SB_{G_2}^{v_0} = 0{,}024793, \quad SB_{G_3}^{v_0} = -0{,}04958,$$
$$S_{G_1}^{v_0} = -0{,}45454 \quad S_{G_2}^{v_0} = 0{,}272723, \quad S_{G_3}^{v_0} = -0{,}81807.$$