Obliczanie wrażliwości z symbolicznej postaci funkcji obwodu

- *przy dużej liczbie częstotliwości, małej liczbie zmiennych elementów.*
Jeżeli układ składa się z impedancji, admitancji i 4 typów źródeł sterowanych, wartości zmienne oznaczone zostaną przez x_1, ... ,x_n, dla pozostałych można podstawić ich wartości liczbowe, dowolna transmitancja w układzie wyraża się stosunkiem dwu wielomianów, np. dla dwóch zmiennych:

$$T = \frac{A_0 + A_1\, x_1 + A_2 x_2 + A_{12}\, x_1 x_2}{B_0 + B_1\, x_1 + B_2 x_2 + B_{12}\, x_1 x_2}, \quad T = \frac{N\left(x_1, ..., x_n\right)}{D\left(x_1, ..., x_n\right)}$$

x_i nie powinno być rezystancją żyracji, przekładnią transformatora. T może być transmitancją U_0/U_i, U_0/I_i, I_0/U_i, I_0/I_i . N i D są wielomianami stopnia pierwszego względem każdego x_i. Zdefiniujmy wielomian pomocniczy H (tożsamościowo równy 0) :

$$H = D - \frac{1}{T} N = D\left(x_1, ..., x_n\right) - P \cdot N\left(x_1, ..., x_n\right) = 0 .$$

H jest wielomianem stopnia pierwszego względem P i każdego x_i. Można go zapisać jako

$$H = A + B\, x_i + P\left(C + F x_i\right),$$

przy czym A, B, C i F są wielomianami nie zawierającymi zmiennych P i x_i. Następnie

$$P = -\frac{A + Bx_i}{C + Fx_i}, \quad x_i = \frac{A + CP}{B + FP}, \quad \frac{\partial H}{\partial x_i} = B + FP, \quad \frac{\partial H}{\partial P} = C + Fx_i$$

$$\frac{\partial P}{\partial x_i} = \frac{B\left(C + Fx_i\right) - F\,(A + Bx_i\,)}{(C + Fx_i\,)^2} = \frac{B - F\,\dfrac{A + Bx_i}{C + Fx_i}}{C + Fx_i} = \frac{B + FP}{\dfrac{\partial H}{\partial P}} = \frac{\dfrac{\partial H}{\partial x_i}}{\dfrac{\partial H}{\partial P}} = \frac{B + FP}{C + Fx_i}$$

Wrażliwość P, odwrotności transmitancji T, na zmianę x_i wynosi :

$$S_{x_i}^{P} = \frac{\partial P}{\partial x_i}\frac{x_i}{P} = \frac{B + FP}{C + Fx_i} \cdot \frac{A + CP}{B + FP} \cdot \frac{C + Fx_i}{A + Bx_i} = \frac{A + CP}{A + Bx_i}$$

Reguła uzyskiwania powyższego równania :

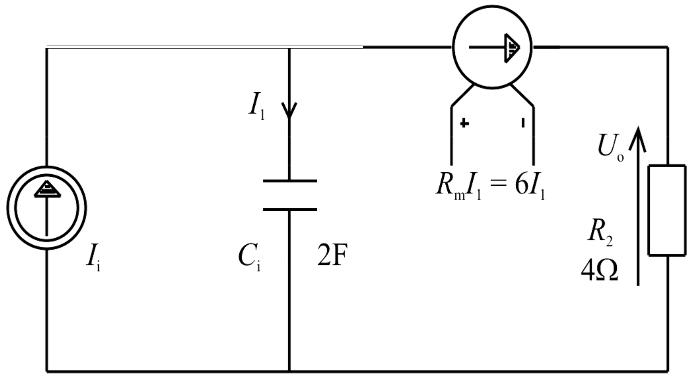
$$S_{x_i}^{P} = \frac{\text{suma składników } H \text{ nie zawierających } x_i}{\text{suma składników } H \text{ nie zawierających } P}$$

Z równania można wyeliminować zmienną P : $\quad S_{x_i}^{P} = \dfrac{C}{C + Fx_i} \cdot \dfrac{A}{A + Bx_i}$

Wrażliwość transmitancji $T = 1/P$ wynosi :

$$S_{x_i}^{T} = \frac{\partial T}{\partial x_i}\frac{x_i}{T} = \frac{\dfrac{\partial T}{T}}{\dfrac{\partial x_i}{x_i}} = \frac{\partial \ln \mathrm{T}}{\partial \ln x_i} = \frac{\partial \ln P}{\partial \ln x_i} = S_{x_i}^{P}$$

Przykład :



Wyznaczyć wrażliwość transmitancji $T{=}U_0/I_i$
$S_{R_2}^{T}, S_{R_m}^{T}, S_{C_1}^{T}$

dla C_1 = 2F, R_2 = 4Ω, R_m = 6Ω i
ω = 1/4, 1/2, 1 rad/s w układzie obok:
Ponieważ:

$$\frac{U_0}{R_2} + \left(U_0 - R_m\ I_1\right) sC - I_i = 0 \quad \text{oraz}$$

$$I_1 = \left(U_0 - R_m\ I_1\right) sC\ ,$$

transmitancja układu jest następująca:

$$T = \frac{R_2 + \mathrm{j}\,\omega C_1\ R_2\ R_m}{1 + \mathrm{j}\omega\, C_1 (R_2 + R_m\,)} = \frac{N}{D}$$

Tworzymy wielomian H :

$$H = D - \frac{1}{T}\,N = D - PN = 1 + \mathrm{j}\omega C_1\left(R_2 + R_m\right) - P\left(R_2 + \mathrm{j}\omega C_1 R_2 R_m\right)$$

Zgodnie z podaną wcześniej regułą otrzymujemy wrażliwości :

$$S_{R_2}^{T} = \frac{1 + \mathrm{j}\omega C_1\ R_m}{1 + \mathrm{j}\omega C_1\left(R_2 + R_m\right)} = \frac{1 + \mathrm{j}12\,\omega}{1 + \mathrm{j}20\,\omega}$$

$$S_{R_m}^{T} = \frac{1 + \mathrm{j}\omega C_1 R_2\ \ PR_2}{1 + \mathrm{j}\omega C_1\left(R_2 + R_m\right)} = \frac{96\,\omega^2}{(1 - 240\,\omega^2\,) + \mathrm{j}32\,\omega}$$

$$S_{C_1}^{T} = \frac{1 - PR_2}{1 + \mathrm{j}\omega C_1\left(R_2 + R_m\right)} = \frac{\mathrm{j}8\omega}{(1 - 240\,\omega^2\,) + \mathrm{j}32\,\omega}$$

gdzie :

$$P = \frac{1}{T} = \frac{1 + \mathrm{j}48\,\omega}{4 + \mathrm{j}48\omega}$$

ω	P = 1/T	$S_{C1}{}^{T}$	$S_{R2}{}^{T}$	$S_{Rm}{}^{T}$
0,25	0,400+j0,050	-0,123+j0,215	0,615+j0,077	0,323+j0,185
0,5	0,412+j0,027	-0,017+j0,063	0,604-j0,040	0,379+j0,121
1,0	0,416+j0,014	-0,004+j0,033	0,601-j0,020	0,395+j0,053