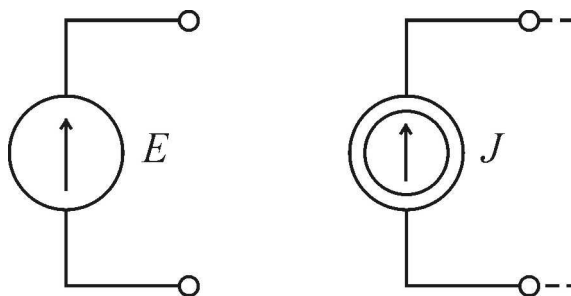


1. Obwody prądu stałego

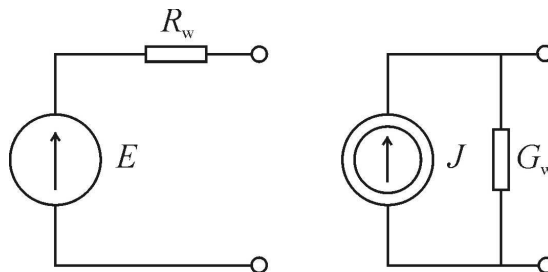
1.1. Źródła napięcia i źródła prądu.

Symbol źródła pokazuje rys. 1.1. Pokazane źródła są źródłami idealnymi bezrezystancyjnymi i charakteryzują się jedynie wydajnością napięciową bądź prądową. Stan biegu jałowego dla źródła napięcia jest przerwą w obwodzie, natomiast dla źródła prądu zwarcie pokazanym przerywaną linią.



Rys. 1.1. Źródło napięcia i źródło prądu stałego

Źródła rzeczywiste można przedstawić jako połączenie źródła idealnego z odpowiednią rezystancją. W przypadku źródła napięcia mówimy tutaj o jego rezystancji wewnętrznej R_w , natomiast w przypadku źródła prądowego używamy raczej pojęcia konduktancji G_w , będącej odwrotnością rezystancji. Ich jednostki są następujące: $R[\Omega]$, $G[S]$. Można używać mnożników: p (10^{-12}), n (10^{-9}), μ (10^{-6}), m (10^{-3}), k (10^3), M (10^6), np. $10\mu S = 10^{-5}[S]$.



Rys. 1.2. Rzeczywiste źródło napięcia i prądu

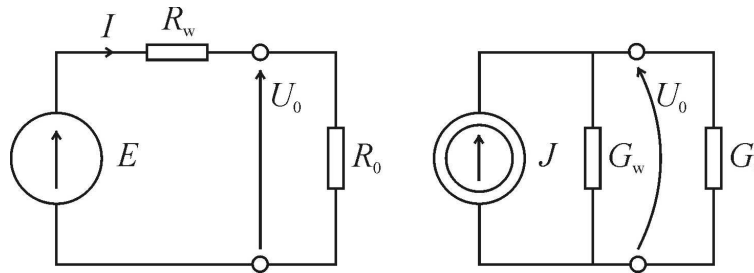
Dla fizycznie istniejących źródeł można używać obydwu modeli, jednak częściej jest używane źródło napięcia. Zwykle jest to podyktowane intuicją inżynierską, można jednak podać uzasadnienie oparte na sprawności zasilania tymi dwoma rodzajami źródeł.

1.2. Dopasowanie energetyczne.

Założmy, że źródło zostało obciążone odbiornikiem o rezystancji R_0 , lub w przypadku źródła prądowego konduktancji G_0 (rys. 1.3). Moc dostarczana przez źródło jest zawsze iloczynem napięcia i prądu źródła. Natomiast moc dostarczona do odbiornika zostanie wyznaczona jako:

$$P = U_0 \cdot I = R \cdot I^2 = \frac{U_0^2}{R} \text{ dla źródła napięcia, lub analogicznie} \quad (1.1)$$

$$P = U_0 \cdot I = U_0^2 \cdot G = \frac{I^2}{G} \text{ dla źródła prądowego (Rys.1.3).}$$



Rys. 1.3. Źródło obciążone odbiornikiem

Obliczenia dla źródła napięcia

Prąd płynący w obwodzie wyraża się wzorem

$$I = \frac{E}{R_w + R_0}, \quad (1.2)$$

tak więc moc dostarczana przez źródło wynosi

$$P_E = E \cdot I = \frac{E^2}{R_w + R_0}. \quad (1.3)$$

Moc wydzielana w odbiorniku wynosi

$$P_0 = R_0 \cdot I^2 = \frac{R_0 \cdot E^2}{(R_w + R_0)^2} \quad (1.4)$$

Stąd sprawność zasilania odbiornika, którą zdefiniujemy jako:

$$\eta_E = \frac{P_0}{P_E} = \frac{R_0 \cdot E^2}{(R_w + R_0)^2} \cdot \frac{R_w + R_0}{E^2} = \frac{R_0}{R_w + R_0} = \frac{k}{k+1}, \text{ gdzie: } k = \frac{R_0}{R_w}. \quad (1.5)$$

Obliczenia dla źródła prądu

Napięcie na odbiorniku U_0 wyraża się wzorem:

$$U_0 = \frac{J}{G_w + G_0}, \quad (1.6)$$

moc dostarczana przez źródło wynosi

$$P_J = U_0 \cdot J = \frac{J^2}{G_w + G_0}. \quad (1.7)$$

Moc wydzielana w odbiorniku wynosi

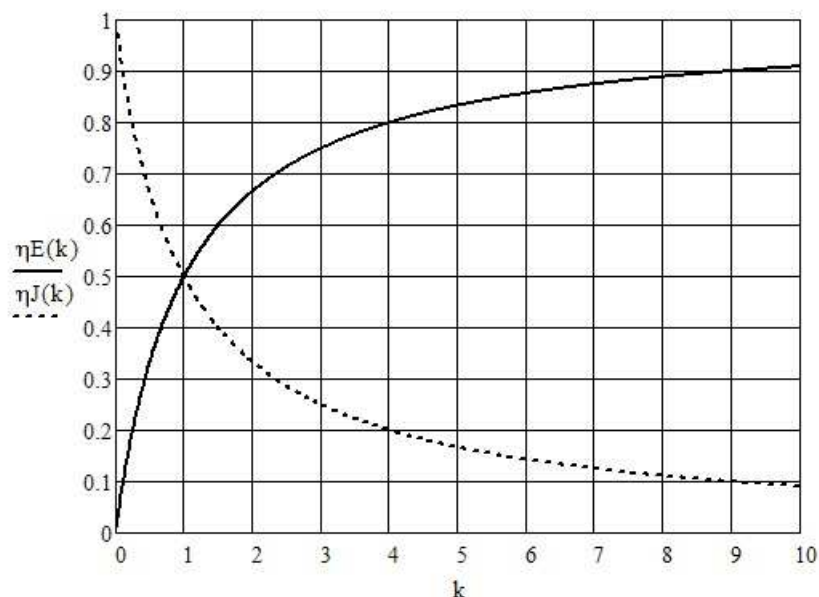
$$P_0 = G_0 \cdot U_0^2 = \frac{G_0 \cdot J^2}{(G_w + G_0)^2} \quad (1.8)$$

Stąd sprawność odbiornika przy zasilaniu źródłem prądowym

$$\eta_J = \frac{P_0}{P_J} = \frac{G_0 \cdot J^2}{(G_w + G_0)^2} \cdot \frac{G_w + G_0}{J^2} = \frac{G_0}{G_w + G_0} = \frac{1}{k+1}, \text{ gdzie: } k = \frac{R_0}{R_w} = \frac{G_w}{G_0}. \quad (1.9)$$

Zakładając, że: $R_0 = 1/G_0$ oraz $R_w = 1/G_w$ przyjęto w obu wzorach, (1.5) oraz (1.9) taką samą definicję współczynnika k . Krzywe sprawności dla obydwu źródeł przedstawiono na

rys.1.4. Przy zasilaniu źródłem napięciowym sprawność jest bliska 1 przy dużym k , tzn. przy dużej rezystancji odbiornika. Przy zasilaniu źródłem prądowym jest wprost przeciwnie, wysoką sprawność osiąga się przy małych rezystancjach odbiornika.



Rys. 1.4. Zależność sprawności η_E oraz η_J od współczynnika k

Intuicyjny wybór rodzaju źródła opiera się więc na wycuciu wyższej sprawności osiągniętej w ten sposób. W większości przypadków wybieramy źródło napięciowe. Źródłami rzeczywistymi, które należałoby modelować źródłem prądowym są jedynie zasilacze laboratoryjne pracujące w trybie ograniczenia prądu, lub np. wysokonapięciowe zasilacze lamp kineskopowych. Podobnie do źródeł prądowych zachowują się niektóre przyrządy półprzewodnikowe.

Opierając się na (1.4) wyznaczmy teraz taką wartość rezystancji odbiornika R_0 , przy której moc wydzielana w odbiorniku jest największa. Wymaga to obliczenia pochodnej mocy P_0

$$P_0 = R_0 \cdot I^2 = \frac{R_0 \cdot E^2}{(R_w + R_0)^2} = \frac{E^2 \cdot R_0}{R_w^2 \cdot \left(1 + 2 \frac{R_0}{R_w} + \left(\frac{R_0}{R_w}\right)^2\right)} = \frac{E^2}{R_w} \frac{k}{(1+k)^2} \quad (1.10)$$

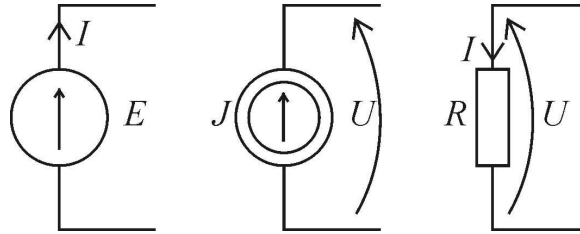
względem parametru k , a następnie przyrównaniu jej do zera

$$\begin{aligned} \frac{dP_0}{dk} &= \frac{E^2}{R_w} \frac{d}{dk} \frac{k}{(1+k)^2} = \frac{E^2}{R_w} \frac{d}{dk} \frac{k}{(1+2k+k^2)} = \frac{E^2}{R_w} \frac{1+2k+k^2 - k \cdot (2+2k)}{(1+2k+k^2)^2} = \\ &= \frac{E^2}{R_w} \frac{1-k^2}{(1+2k+k^2)^2} \Rightarrow 0 \end{aligned} \quad (1.11)$$

Ponieważ dla $k \geq 0$ mianownik wyrażenia jest większy od zera, rozwiązaniem jest $k = 1$. Oznacza to, że rezystancje źródła i odbiornika powinny być jednakowe. Analogiczne rozważania dotyczące mocy P_0 opisanej wzorem (1.8) prowadzą do takiego samego wyniku. Obliczenie sprawności, która towarzyszy dopasowaniu energetycznemu ($k = 1$) z użyciem wzoru (1.5) lub (1.9) daje sprawność równą 0,5. Tak niski współczynnik sprawności jest nie do zaakceptowania w energetyce dużych mocy, gdzie wobec tego dopasowanie energetyczne nie jest stosowane. Posiada ono duże znaczenie jedynie przy transmisji małych sygnałów, gdy zależy nam, aby odbiorca otrzymywał sygnał o możliwie największej mocy. Przykładem może być telefonia analogowa.

1.3. Strzałkowanie napięć i prądów

Sposób strzałkowania napięć i prądów jest pewną umową stosowaną obecnie powszechnie. Jeżeli przy analizie obwodu przyjmimy dowolnie wybrane kierunki prądów, to jesteśmy zmuszeni do zastrzałkowania napięć zgodnie z zasadą pokazaną na rys. 1.5.



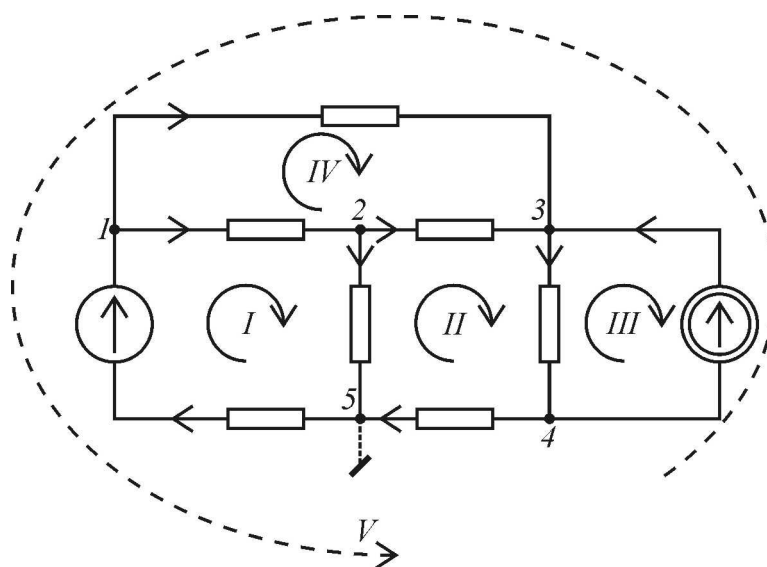
Rys. 1.5. Zasada strzałkowania prądów i napięć

1.4. Węzły oraz oczka obwodu. Prawa Kirchhoffa

Na rys. 1.6 przedstawiono obwód elektryczny, w którym można wyróżnić 5 węzłów oraz 5 oczek. Dla każdego z węzłów możemy napisać równania wynikające z pierwszego prawa Kirchhoffa, dotyczące sumy prądów w węźle. Pisząc ostatnie z tych równań dojdziemy do wniosku, że wszystkie prądy zostały już wykorzystane w poprzednich równaniach, tak więc to ostatnie nie wniesie żadnej nowej informacji. Z tego powodu jeden węzeł nazywamy węzłem zależnym i pomijamy go przy pisaniu równań. Wybór węzła zależnego jest dowolny. Często traktujemy ten węzeł jako uziemienie (węzeł 5).

Jeżeli w naszym obwodzie gałęzie się nie przecinają, obwód taki nazywamy planarnym i łatwo możemy dla niego wyznaczyć tzw. oczka. Obwód na rys. 1.6 zawiera cztery oczka wewnętrzne i jedno zewnętrzne. Ponieważ jedno oczko jest oczkiem zależnym, pisząc równania wynikające z drugiego prawa Kirchhoffa (sumy spadków napięć w oczku) to oczko pomijamy. Jako zależne zwykle wybieramy oczko zewnętrzne, tutaj nr 5, oznaczone linią przerywaną. Kierunek strzałkowania oczek jest dowolny, ale zalecana jest konsekwencja w wyborze tego kierunku w ramach jednego obwodu.

W przypadku obwodów nieplanarnych (przestrzennych) wyznaczenie oczek jest utrudnione.

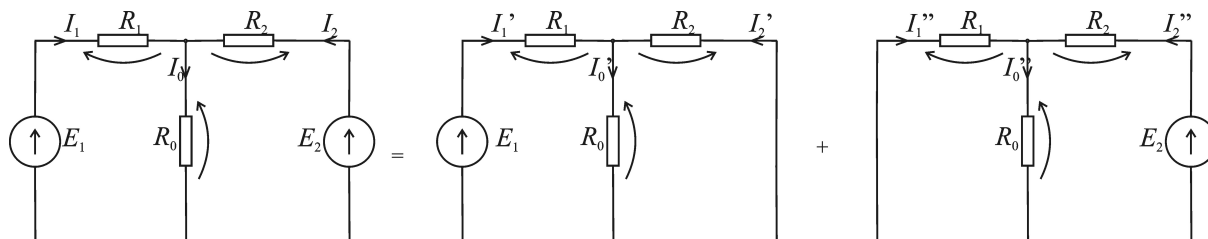


Rys. 1.6. Węzły i oczka obwodu

1.5. Metoda superpozycji

Zasada superpozycji mówi ogólnie, że odpowiedź układu elektrycznego (np. prąd, napięcie), jest sumą odpowiedzi na każde z wymuszeń z osobna. Wymuszeniem będzie zwykle źródło napięcia lub prądu. Warunkiem stosowalności tej metody jest liniowość układu, co oznacza, że wszystkie elementy układu muszą być liniowe. Np. liniowość rezystancji oznacza $R = \text{const}$ w całym zakresie prądów lub napięć.

Budując układy zastępcze ograniczone do jednego pobudzenia, zwieramy wyłączane źródła napięcia i rozwieramy prądy. Zastosowanie tej metody zostanie pokazane na przykładzie rozwiązania uzyskanego przy użyciu programu Mathcad.



Rys. 1.7. Zastosowanie zasady superpozycji do rozwiązania obwodu

Dane:

$$R_0 := 1 \quad R_1 := 2 \quad R_2 := 3 \quad E_1 := 10 \quad E_2 := 5 \quad R := R \cdot \Omega \quad E := E \cdot V$$

Rozwiązanie układu oryginalnego przy użyciu praw Kirchhoffa

Wartości początkowe: $I_0 := 0 \quad I_1 := 0 \quad I_2 := 0$

Giver

$$I_1 + I_2 - I_0 = 0 \quad (\text{pierwsze prawo Kirchhoffa})$$

$$E_1 - R_1 \cdot I_1 - R_0 \cdot I_0 = 0 \quad (\text{drugie prawo Kirchhoffa})$$

$$-E_2 + R_0 \cdot I_0 + R_2 \cdot I_2 = 0$$

$$I := \text{Find}(I) \quad (\text{rozwiązanie układu równań})$$

$$I^T = (3.636 \quad 3.182 \quad 0.455) A \quad (\text{prądy w naszym układzie})$$

Rozwiązanie przy użyciu metody superpozycji:

$$R_{\text{wyp1}} := R_1 + \frac{R_0 \cdot R_2}{R_0 + R_2} \quad R_{\text{wyp2}} := R_2 + \frac{R_0 \cdot R_1}{R_0 + R_1} \quad (\text{rezystancje wypadkowe})$$

$$I_{11} := \frac{E_1}{R_{\text{wyp1}}} \quad I_{22} := \frac{E_2}{R_{\text{wyp2}}} \quad (\text{prądy w gałęzi ze źródłem})$$

$$U_{10} := I_{11} \cdot \frac{R_0 \cdot R_2}{R_0 + R_2} \quad U_{20} := I_{22} \cdot \frac{R_0 \cdot R_1}{R_0 + R_1} \quad (\text{napięcie na gałęzi z } R_0)$$

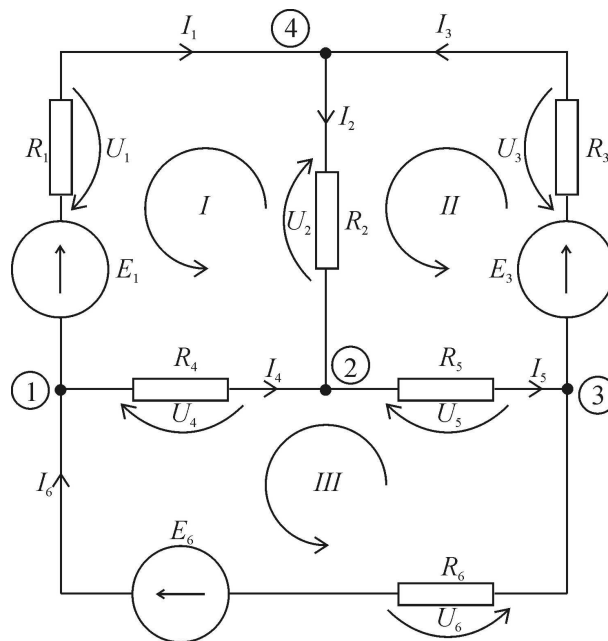
$$I_{10} := \frac{U_{10}}{R_0} \quad I_{20} := \frac{U_{20}}{R_0}$$

$$I_0 := I_{10} + I_{20} = 3.636 A \quad (\text{prąd w gałęzi środkowej})$$

1.6. Rozwiązywanie obwodów przy użyciu praw Kirchhoffa

Pierwszy przykład takiego rozwiązania można znaleźć już w rozdz. 1.5. Rozwiązanie polega na sformułowaniu N równań z pierwszego prawa Kirchhoffa, M – z drugiego, oraz J równań gałęziowych, gdzie N jest liczbą węzłów niezależnych, M jest liczbą oczek niezależnych, a J – liczbą gałęzi. Wprawdzie równania te są bardzo proste, ale ich liczba jest znaczna i rozwiązanie jest możliwe zwykle tylko przy użyciu programu narzędziowego, który ułatwi rozwiązanie układów równań. Ilość równań może zostać zmniejszona przez podstawienie równań gałęziowych bezpośrednio, np. do równań z drugiego prawa Kirchhoffa. Zaletą tej metody jest jej ogólność oraz możliwość rozwiązywania obwodów zawierających elementy o nieliniowej charakterystyce prąd-napięcie.

Zostanie wykonane przykładowe rozwiązanie obwodu pokazanego na rys. 1.8 z użyciem pakietu Mathcad.



Rys. 1.8. Obwód zawierający trzy oczka i trzy węzły niezależne oraz sześć gałęzi

Dane

$$R_1 := 1 \cdot \Omega \quad R_2 := 0.5 \cdot \Omega \quad R_3 := 1 \cdot \Omega \quad R_4 := 2 \cdot \Omega \quad R_5 := 2 \cdot \Omega \quad R_6 := 1 \cdot \Omega$$

$$E_1 := 5 \cdot V \quad E_3 := 2 \cdot V \quad E_6 := 5 \cdot V$$

$$j := 1..6 \quad \text{Warunki początkowe rozwiązania:} \quad I_j := 1 \cdot A$$

Giver

$$I_6 - I_1 - I_4 = 0 \quad \text{Trzy równania z pierwszego prawa Kirchhoffa}$$

$$I_2 + I_4 - I_5 = 0$$

$$I_5 - I_3 - I_6 = 0$$

$$R_1 \cdot I_1 - E_1 - R_4 \cdot I_4 + R_2 \cdot I_2 = 0 \quad \text{Trzy równania z drugiego prawa Kirchhoffa}$$

$$E_3 - R_3 \cdot I_3 - R_2 \cdot I_2 - R_5 \cdot I_5 = 0 \quad \text{Spadki napięć zapisane zgodnie z prawem Ohma}$$

$$R_5 \cdot I_5 + R_4 \cdot I_4 - E_6 + R_6 \cdot I_6 = 0$$

$$I := \text{Find}(I)$$

$$I^T = (3.375 \quad 1.75 \quad -1.625 \quad -0.375 \quad 1.375 \quad 3) A$$

W powyższym rozwiązaniu ograniczono liczbę niewiadomych do liczby prądów. Pełne rozwiązanie, uwzględniające napięcia, wygląda następująco:

Dane

$$R_1 := 1 \cdot \Omega \quad R_2 := 0.5 \cdot \Omega \quad R_3 := 1 \cdot \Omega \quad R_4 := 2 \cdot \Omega \quad R_5 := 2 \cdot \Omega \quad R_6 := 1 \cdot \Omega$$

$$E_1 := 5 \cdot V \quad E_3 := 2 \cdot V \quad E_6 := 5 \cdot V$$

$$j := 1..6$$

$$\text{Warunki początkowe rozwiązania: } I_j := 1 \cdot A \quad U_j := 1 \cdot V$$

Giver

$$I_6 - I_1 - I_4 = 0 \quad \text{Trzy równania z pierwszego prawa Kirchhoffa}$$

$$I_2 + I_4 - I_5 = 0$$

$$I_5 - I_3 - I_6 = 0$$

$$U_1 - E_1 - U_4 + U_2 = 0 \quad \text{Trzy równania z drugiego prawa Kirchhoffa}$$

$$E_3 - U_3 - U_2 - U_5 = 0$$

$$U_5 + U_4 - E_6 + U_6 = 0$$

$$U_1 = R_1 \cdot I_1 \quad \text{Sześć równań gałęziowych (prawo Ohma)}$$

$$U_2 = R_2 \cdot I_2$$

$$U_3 = R_3 \cdot I_3$$

$$U_4 = R_4 \cdot I_4$$

$$U_5 = R_5 \cdot I_5$$

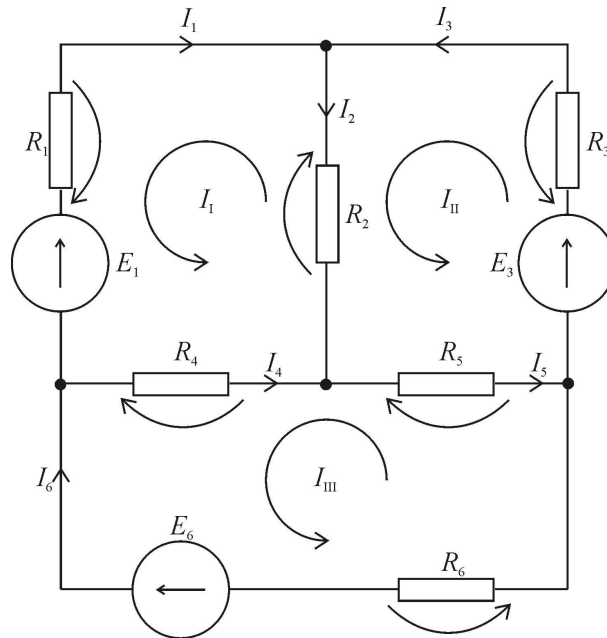
$$U_6 = R_6 \cdot I_6$$

$$\begin{pmatrix} U \\ I \end{pmatrix} := \text{Find}(U, I) \quad U^T = (3.375 \quad 0.875 \quad -1.625 \quad -0.75 \quad 2.75 \quad 3) V$$

$$I^T = (3.375 \quad 1.75 \quad -1.625 \quad -0.375 \quad 1.375 \quad 3) A$$

1.7. Rozwiązywanie obwodów przy użyciu metody prądów oczkowych

Metoda ta oparta została na drugim prawie Kirchhoffa zastosowanym do wszystkich niezależnych oczek układu. Na rys. 1.9 przedstawiono ten sam układ z zaznaczonymi trzema oczkami oraz spadkami napięć na rezystorach. Zostanie przestawione wyprowadzenie tej metody na przykładzie podanego układu.



Rys. 1.9. Układ użyty do wyprowadzenia metody oczkowej

Najpierw zostaną wykonane bilanse napięć w trzech oczkach

$$\begin{aligned} R_1 I_1 - E_1 - R_4 I_4 + R_2 I_2 &= 0 \\ E_3 - R_3 I_3 - R_2 I_2 - R_5 I_5 &= 0 \\ R_5 I_5 + R_4 I_4 - E_6 + R_6 I_6 &= 0 \end{aligned} \quad (1.12)$$

Te trzy równania zawierają aż sześć niewiadomych prądów, więc nie można ich rozwiązać. Wprowadźmy pojęcie prądów oczkowych I_I , I_{II} , I_{III} . Każdy z nich płynie w swoim oczku zamkniętym. W poszczególnych gałęziach prądy oczkowe sumują się dając prądy gałęziowe:

$$\begin{aligned} I_1 &= -I_I, & I_2 &= I_{II} - I_I, & I_3 &= I_{II}, \\ I_4 &= I_I - I_{III}, & I_5 &= I_{II} - I_{III}, & I_6 &= -I_{III}. \end{aligned} \quad (1.13)$$

Podstawmy do równania 1.12 w miejsce prądów gałęziowych prądy oczkowe 1.13.

$$\begin{aligned} -R_1 I_I - E_1 - R_4 (I_I - I_{III}) + R_2 (I_{II} - I_I) &= 0 \\ E_3 - R_3 I_{II} - R_2 (I_{II} - I_I) - R_5 (I_{II} - I_{III}) &= 0 \\ R_5 (I_{II} - I_{III}) + R_4 (I_I - I_{III}) - E_6 - R_6 I_{III} &= 0 \end{aligned} \quad (1.14)$$

Jak widać, te trzy równania mają trzy niewiadome i można je teraz rozwiązać. Dla formowania tych równań można podać regułę mnemotechniczną, ale warto je uporządkować w inny sposób:

$$\begin{aligned}
 I_1 \cdot (R_1 + R_2 + R_4) - I_{II} \cdot R_2 & - I_{III} \cdot R_4 & = -E_1 \\
 -I_1 \cdot R_2 & + I_{II} \cdot (R_2 + R_3 + R_5) - I_{III} \cdot R_5 & = E_3 \\
 -I_1 \cdot R_4 & - I_{II} \cdot R_5 & + I_{III} \cdot (R_4 + R_5 + R_6) = -E_6
 \end{aligned} \tag{1.15}$$

Równania te powstają wg następującej reguły:

- na głównej przekątnej występują sumy rezystancji dla odpowiedniego oczka,
- poza główną przekątną rezystancje łączące oczka (z minusem),
- po prawej stronie źródła napięcia ze znakiem wynikającym z kierunku oczka.

W wypadku występowania źródeł prądu wymuszają one wartość odpowiedniego prądu oczkowego. Równania piszemy w zwykły sposób, ale zamiast równania dla prądu oczkowego wymuszonego przez źródło prądowe podstawiamy wydajność tego źródła.

Przykładowe rozwiązanie przy użyciu Mathcad'a i tymi samymi danymi co poprzednio przedstawione jest poniżej.

Dane

$$R_1 := 1 \cdot \Omega \quad R_2 := 0.5 \cdot \Omega \quad R_3 := 1 \cdot \Omega \quad R_4 := 2 \cdot \Omega \quad R_5 := 2 \cdot \Omega \quad R_6 := 1 \cdot \Omega$$

$$E_1 := 5 \cdot V \quad E_3 := 2 \cdot V \quad E_6 := 5 \cdot V$$

$$j := 1..3$$

Warunki początkowe rozwiązania: $I_{oczkj} := 1 \cdot A$

Giver

$$\begin{aligned}
 I_{oczk1} \cdot (R_1 + R_2 + R_4) - I_{oczk2} \cdot R_2 - I_{oczk3} \cdot R_4 & = -E_1 & \text{Równania oczkowe} \\
 -I_{oczk1} \cdot R_2 + I_{oczk2} \cdot (R_2 + R_3 + R_5) - I_{oczk3} \cdot R_5 & = E_3 \\
 -I_{oczk1} \cdot R_4 - I_{oczk2} \cdot R_5 + I_{oczk3} \cdot (R_4 + R_5 + R_6) & = -E_6
 \end{aligned}$$

$$I_{oczk} := \text{Find}(I_{oczk}) \quad I_{oczk}^T = (-3.375 \quad -1.625 \quad -3) A$$

$$I_1 := -I_{oczk1} \quad I_2 := I_{oczk2} - I_{oczk1} \quad I_3 := I_{oczk2}$$

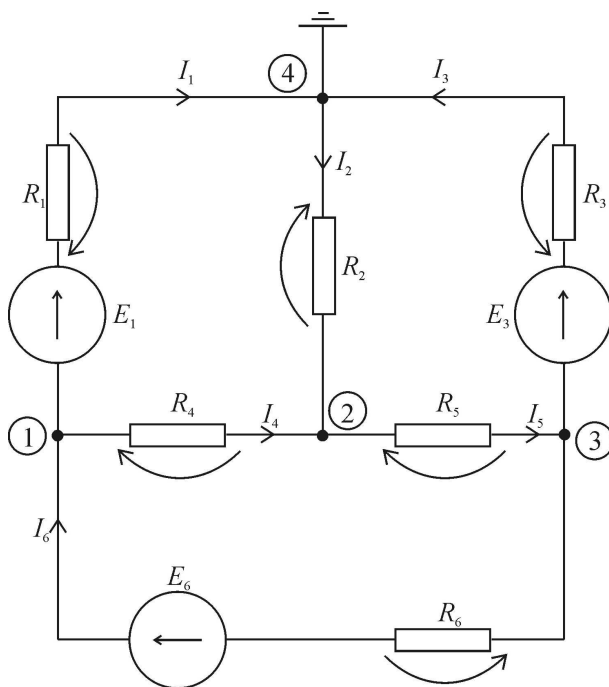
$$I_4 := I_{oczk1} - I_{oczk3} \quad I_5 := I_{oczk2} - I_{oczk3} \quad I_6 := -I_{oczk3}$$

$$I^T = (3.375 \quad 1.75 \quad -1.625 \quad -0.375 \quad 1.375 \quad 3) A$$

Metoda prądów oczkowych może być stosowana dla obwodów planarnych, gdy łatwo jest oznaczyć oczka układu. W innym wypadku jej użycie może być utrudnione. Obecność źródeł prądowych oznacza zmniejszenie liczby równań, a więc jest przesłanką dla użycia tej metody. Ponieważ ilość równań równa się zaledwie liczbie oczek niezależnych, wiele obwodów można rozwiązać analitycznie (bez użycia programów narzędziowych).

1.8. Rozwiązywanie obwodów przy użyciu metody potencjałów węzłowych

Metoda ta opiera się na pierwszym prawie Kirchhoffa zastosowanym do wszystkich węzłów niezależnych obwodu. Na rys. 1.10 widoczny jest ten sam obwód, z zaznaczonymi trzema węzłami. Jedynie trzy dowolnie wybrane węzły są niezależne, ponieważ próba napisania sumy prądów w czwartym węźle oznaczać będzie użycie tych samych prądów gałęziowych, które już były użyte w poprzednich równaniach. Matematycznie oznacza to, że czwarte równanie można uzyskać jako kombinację wcześniej napisanych trzech równań. Wybór węzła zależnego jest dowolny, tutaj jest to węzeł 4 i został on uziemiony. W takiej sytuacji napięcia pozostałych węzłów, zmierzone względem uziemienia, będziemy nazywać potencjałami węzłowymi.



Rys. 1.10. Układ ilustrujący wyprowadzenie metody węzłowej

Napiżemy trzy równania wynikające z pierwszego prawa Kirchhoffa dla węzłów 1-3.

$$\begin{aligned} I_6 - I_1 - I_4 &= 0 \\ I_2 + I_4 - I_5 &= 0 \\ I_5 - I_3 - I_6 &= 0 \end{aligned} \quad (1.16)$$

Ponieważ te równania zawierają sześć niewiadomych, nie można ich rozwiązać. Spróbujmy jednak przedstawić zawarte w nich prądy gałęziowe za pomocą potencjałów węzłów 1,2,3:

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{V_1 + E_1}{R_1} & I_2 &= \frac{-V_2}{R_2} & I_3 &= \frac{V_3 + E_3}{R_3} \\ I_4 &= \frac{V_1 - V_2}{R_4} & I_5 &= \frac{V_2 - V_3}{R_5} & I_6 &= \frac{V_3 - V_1 + E_6}{R_6}. \end{aligned} \quad (1.17)$$

Podstawienie 1.17 do 1.16 daje układ równań z trzema niewiadomymi V_1, V_2, V_3 :

$$\begin{aligned}
 \frac{V_3 - V_1 + E_6}{R_6} - \frac{V_1 + E_1}{R_1} - \frac{V_1 - V_2}{R_4} &= 0 \\
 \frac{-V_2}{R_2} + \frac{V_1 - V_2}{R_4} - \frac{V_2 - V_3}{R_5} &= 0 \\
 \frac{V_2 - V_3}{R_5} - \frac{V_3 + E_3}{R_3} - \frac{V_3 - V_1 + E_6}{R_6} &= 0.
 \end{aligned} \tag{1.18}$$

W celu podania reguły mnemotechnicznej uzyskiwania tych równań należy je uporządkować w sposób następujący:

$$\begin{aligned}
 V_1 \cdot \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_6} \right) - V_2 \cdot \frac{1}{R_4} - V_3 \cdot \frac{1}{R_6} &= -\frac{E_1}{R_1} + \frac{E_6}{R_6} \\
 -V_1 \cdot \frac{1}{R_4} + V_2 \cdot \left(\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_5} \right) - V_3 \cdot \frac{1}{R_5} &= 0 \\
 -V_1 \cdot \frac{1}{R_6} - V_2 \cdot \frac{1}{R_5} + V_3 \cdot \left(\frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_5} + \frac{1}{R_6} \right) &= -\frac{E_3}{R_3} - \frac{E_6}{R_6}
 \end{aligned} \tag{1.19}$$

Równania te powstają wg następującej reguły:

- przy potencjale węzłowym węzła, dla którego piszemy równanie, występuje suma konduktancji dołączonych do tego węzła
- pozostałe potencjały są pisane ze znakiem minus i pomnożone przez konduktancję łączącą oba węzły
- źródła napięciowe pomnożone przez konduktancję swojej gałęzi występują po prawej stronie. Podobnie znalazłyby się tam źródła prądowe (bez konduktancji).

Przykład rozwiązania tego samego obwodu z użyciem Mathcad'a jest podany poniżej.

Dane

$$R_1 := 1 \cdot \Omega \quad R_2 := 0.5 \cdot \Omega \quad R_3 := 1 \cdot \Omega \quad R_4 := 2 \cdot \Omega \quad R_5 := 2 \cdot \Omega \quad R_6 := 1 \cdot \Omega$$

$$E_1 := 5 \cdot V \quad E_3 := 2 \cdot V \quad E_6 := 5 \cdot V$$

$$j := 1..6 \quad \text{Warunki początkowe rozwiązania: } V_j := 0 \cdot V$$

Giver

$$V_1 \cdot \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_6} \right) - \frac{V_2}{R_4} - \frac{V_3}{R_6} + \left(\frac{E_1}{R_1} - \frac{E_6}{R_6} \right) = 0$$

$$\frac{-V_1}{R_4} + V_2 \cdot \left(\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_5} \right) - \frac{V_3}{R_5} = 0$$

$$\frac{-V_1}{R_6} - \frac{V_2}{R_5} + V_3 \cdot \left(\frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_5} + \frac{1}{R_6} \right) + \frac{E_3}{R_3} + \frac{E_6}{R_6} = 0$$

$$V := \text{Find}(V) \quad V^T = (-1.625 \quad -0.875 \quad -3.625 \quad 0 \quad 0 \quad 0) V$$

$$I_1 := \frac{V_1 + E_1}{R_1} \quad I_2 := \frac{-V_2}{R_2} \quad I_3 := \frac{V_3 + E_3}{R_3}$$

$$I_4 := \frac{V_1 - V_2}{R_4} \quad I_5 := \frac{V_2 - V_3}{R_5} \quad I_6 := \frac{V_3 - V_1 + E_6}{R_6}$$

$$I^T = (3.375 \quad 1.75 \quad -1.625 \quad -0.375 \quad 1.375 \quad 3) A$$